Universidade Federal da Paraíba
Universidade Aberta do Brasil - UFPB VIRTUAL

Introdução à Álgebra Linear - 2008.2

Prof.ª Shirley Maria Santos Souza
Tutor José Laudelino de Menezes Neto

2.ª Lista de Exercícios

exercícios resolvidos

Exercício 1 *Consideremos* $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 0\}$ *e* $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ *subespaços vetoriais do* $\mathbb{R}^3$. *Determine o subespaço* $W_1 \cap W_2$. *A soma de* $W_1 + W_2$ *é direta? O que representa geometricamente os subespaços* W_1, W_2 *e* $W_1 \cap W_2$*?*

Solução: Vamos determinar a interseção $W_1 \cap W_2$. Para tanto, seja $v = (x_1, y_1, z_1)$ um vetor pertencente a interseção de W_1 e W_2, então

$$v \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow v \in W_1 \text{ e } v \in W_2$$

Logo, $v = (x_1, 0, z_1)$, pois v pertence a W_1, e $v = (x_1, y_1, 0)$, pois v também pertence a W_2. Sendo assim, temos que

$$v = (x_1, 0, z_1) = (x_1, y_1, 0) \Rightarrow x_1 \in \mathbb{R}, y_1 = 0 \text{ e } z_1 = 0.$$

Portanto, $W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = z = 0\}$.

Nem precisamos calcular $W_1 + W_2$ para saber que a soma não é direta, porque já sabemos que $W_1 \cap W_2 \neq \{(0, 0, 0)\}$, o vetor $(1, 0, 0) \in W_1 \cap W_2$.

- W_1 representa o plano xz.
- W_2 representa o plano xy.
- $W_1 \cap W_2$ representa o eixo x.

Exercício 2 *Seja $V = P_2$, o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2. É possível escrever o vetor $p = t^2 + t + 6$ como combinação linear dos vetores t^2, t e 1? Justifique sua reposta.*

Solução: Sim, é possível escrever o vetor $p = t^2 + t + 6$ como combinação linear de t^2, t e 1, pois

$$p = 1 \cdot t^2 + 1 \cdot t + 6 \cdot 1.$$

Na **Aula n.º 4** iremos ver que $\{t^2, t, 1\}$ é uma *base* do espaço vetorial P_2.

Exercício 3 *Consideremos as matrizes*

$$v = \begin{pmatrix} k & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

do espaço vetorial $M(2,2)$. Determinar o valor de k de tal maneira que v seja escrito como combinação linear de v_1, v_2 e v_3.

Solução: Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Para que v seja combinação linear de v_1, v_2 e v_3, a seguinte igualdade é satisfeita, onde, pelo menos, a, b ou c é diferente de zero:

$$v = av_1 + bv_2 + cv_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} k & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} k & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a \\ 2a & 3a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4b & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4b & -a-b \\ 2a & 3a+c \end{pmatrix}.$$

Assim, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} k & = & a+4b \\ -3 & = & -a-b \\ 6 & = & 2a \\ 7 & = & 3a+c \end{cases}$$

Logo,

da terceira igualdade, $2a = 6 \Rightarrow a = 3$.

Da segunda igualdade, $-3 = -a - b \Rightarrow -3 = -3 - b \Rightarrow b = 0$.

Da quarta igualdade, $7 = 3a + c \Rightarrow 7 = 3 \cdot 3 + c \Rightarrow 7 = 9 + c \Rightarrow c = -2$.

Da primeira igualdade, $k = a + 4b = -3 + 4 \cdot 0 \Rightarrow k = -3$.

De fato,

$$\begin{pmatrix} a+4b & -a-b \\ 2a & 3a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4\cdot 0 & -(3)-0 \\ 2\cdot 3 & 3\cdot 3+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Portanto, o valor de k, para que v seja escrito como combinação linear de v_1, v_2 e v_3, deve ser igual a 3.

Exercício 4 *Verifique se os vetores* $(0, 3, -5, -\frac{11}{2}), (1, -1, 2, 3)$ *e* $(4, 2, -2, 1)$ *são LI ou LD.*

Solução: Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Consideremos $v_1 = (0, 3, -5, -\frac{11}{2}), v_2 = (1, -1, 2, 3)$ e $v_3 = (4, 2, -2, 1)$. Se $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ for verdade apenas quando $a = b = c = 0$, então v_1, v_2 e v_3 são LI, caso contrário, v_1, v_2 e v_3 serão LD.

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0 \Rightarrow a(0, 3, -5, -\frac{11}{2}) + b(1, -1, 2, 3) + c(4, 2, -2, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$(0, 3a, -5a, -\frac{11a}{2}) + (b, -b, 2b, 3b) + (4c, 2c, -2c, c) = (0, 0, 0, 0)$$

$$(b + 4c, 3a - b + 2c, -5a + 2b - 2c, -\frac{11a}{2} + 3b + c) = (0, 0, 0, 0)$$

Logo, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} b + 4c &= 0 \\ 3a - b + 2c &= 0 \\ -5a + 2b - 2c &= 0 \\ -\frac{11}{2}a + 3b + c &= 0 \end{cases}$$

Assim,

$$b + 4c = 0 \Rightarrow b = -4c$$

$$3a - b + 2c = 0 \Rightarrow 3a - (-4c) + 2c = 0 \Rightarrow 3a + 4c + 2c = 0 \Rightarrow 3a = -6c \Rightarrow a = -2c$$

$$-5a + 2b - 2c = 0 \Rightarrow -5(-2c) + 2(-4c) - 2c = 0 \Rightarrow 10c - 8c - 2c = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10c - 10c = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$$-\frac{11}{2}(-2c) + 3(-4c) + c = 0 \Rightarrow 11c - 12c + c = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Para $c = 1$ temos $-2v_1 - 4v_2 + v_3 = 0 \Rightarrow v_1, v_2$ e v_3 são LD.

Exercício 5 *Seja* $v_1 = (1,2) \in \mathbb{R}^2$*, achar um vetor* $v_2 \in \mathbb{R}^2$ *tal que* v_1 *e* v_2 *sejam linearmente independentes (LI).*

Solução: Dois vetores v_1 e v_2 são LI se, e somente se, $\alpha v_1 \neq \beta v_2$, para quaisquer α e β diferentes de zero, pertencentes aos números reais.

O vetor $v_2 = (-1,2)$ não é combinação linear de v_1, ou seja, $\alpha v_1 = \alpha(1,2) \neq \beta(-1,2) = \beta v_2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Portanto, v_1 e v_2 são LI.

Vamos verificar que, de fato, $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (-1,2)$ são LI:

$$av_1 + bv_2 = 0 \Rightarrow a(-1,2) + b(1,2) = (0,0) \Rightarrow (-a+b, 2a+2b) = (0,0)$$

Logo, $-a+b=0 \Rightarrow a=b$ e, da segunda equação temos $2a+2b=0$, substituindo o valor de a encontrado na primeira equação temos $2b+2b=0 \Rightarrow 4b=0 \Rightarrow b=0$. Como $a=b \Rightarrow a=0$. Portanto, $v_1=(1,2)$ e $v_2=(-1,2)$ são LI.

Um outro vetor v_2 que é LI com v_1 é $v_2=(1,0)$. Existem outros vetores v_2 LI com v_1.

Exercício 6 *Verificar se o vetor* $w = (6, 3, 8) \in \mathbb{R}^3$ *é combinação linear dos vetores* $v_1 = (2, 1, 2)$ *e* $v_2 = (0, 0, 1)$.

A resolução deste exercício foi feita a partir das respostas dadas nos Fóruns da disciplina.

Solução: Para isto, devemos encontrar $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $w = xv_1 + yv_2$,

$$(6, 3, 8) = x(2, 1, 2) + y(0, 0, 1) \Rightarrow (6, 3, 8) = (2x, x, 2x) + (0, 0, y).$$

Podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x &= 6 \\ x &= 3 \\ 2x + y &= 8 \end{cases}$$

Nas duas primeiras equações teremos $x = 3$ e daí encontraremos na terceira equação $y = 2$. Com isso, podemos escrever w como combinação linear dos vetores v_1 e v_2. De fato,

$$3v_1 + 2v_2 = 3(2, 1, 2) + 2(0, 0, 1) = (3 \cdot 2, 3 \cdot 1, 3 \cdot 2) + (2 \cdot 0, 2 \cdot 0, 2 \cdot 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (6, 3, 6) + (0, 0, 2) = (6, 3, 8) = w.$$

Exercício 7 *Considere os subespaços* $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 2z\}$ *e* $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 2z + x\}$ *de* $\mathbb{R}^3$*. Determine* $W_1 \cap W_2$*. A soma* $W_1 + W_2$ *é direta?*

A resolução deste exercício foi feita a partir das respostas dadas nos Fóruns da disciplina.

Solução: Seja $v = (x, y, z)$ um vetor qualquer de $W_1 \cap W_2$, encontraremos condições sobre os escalares x, y e z.

Sendo $v = (x, y, z) \in W_1$, então,

$$x = 2z \text{ (Equação 1)}$$

Mas, $v = (x, y, z)$ também pertence a W_2, daí

$$y = 2z + x \text{ (Equação 2)}$$

Substituindo o valor de $x = 2z$ da Equação 1 na Equação 2, $y = 2z + x$, temos, $y = 2z + 2z = 4z$ e, sendo $x = 2z$, segue que, $v = (2z, 4z, z)$. Isto quer dizer que todo vetor $v \in W_1 \cap W_2$ é escrito da seguinte maneira $v = (2z, 4z, z)$, com $z \in \mathbb{R}$. Em outras palavras,

$$W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z) \in R^3; x = 2z \text{ e } y = 4z\}$$