Universidade Federal da Paraíba

Universidade Aberta do Brasil - UFPB VIRTUAL

Introdução à Álgebra Linear - 2008.2

Prof.ª Shirley Maria Santos Souza

Tutor José Laudelino de Menezes Neto

1.ª Lista de Exercícios

exercícios resolvidos

Exercício 1 *Mostre que $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = x\} \subset \mathbb{R}^3$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$.*

Solução: Para mostrarmos que $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = x\}$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, devemos verificar se as duas condições apresentadas na **Definição 2** da **Aula n.º 2** são satisfeitas, ou seja,

- dados $u, v \in W$, devemos verificar se a soma $u + v$ pertence a W;
- dados $u \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, devemos verificar se a multiplicação por escalar αu pertence a W.

O subconjunto W é diferente do vazio, porque $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0) \in W$, pois a primeira coordenada x_0 é igual a segunda y_0, ou seja, $x_0 = y_0 = 0$.

Uma outra justificativa para mostrar que $W \neq \varnothing$: qualquer vetor cuja primeira coordenada é igual a segunda pertence a W, logo $(1, 1, 2) \in W \Rightarrow W$ é diferente do vazio. O que queremos dizer é que não é necessário que o vetor nulo pertença a um subconjunto para mostrarmos que este subconjunto é diferente de vazio, basta mostrar que, pelo menos, um vetor, mesmo diferente do vetor nulo, pertença a este subconjunto.

Sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ vetores pertencentes a $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = x\}$, então, pela definição de W, $x_1 = y_1 \Rightarrow$ podemos excrever $u = (x_1, y_1, z_1) = (x_1, x_1, z_1)$. A mesma observação vale para o vetor v, isto é, podemos escrever $v = (x_2, y_2, z_2) = (x_2, x_2, z_2)$. **Vamos ver se a condição da soma é válida:**

$$u + v = (x_1, x_1, z_1) + (x_2, x_2, z_2) = (\underbrace{x_1 + x_2}_{\text{1.ª coordenada}}, \underbrace{x_1 + x_2}_{\text{2.ª coordenada}}, z_1 + z_2)$$

Como a primeira coodenada de $u+v$ é igual a segunda coordenada, temos que $u+v \in W$. Portanto, a condição de soma é válida em W.

Resta verificarmos se a **multiplicação por escalar é válida** em W. Sejam $u = (x_1, y_1, z_1) \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha u = \alpha(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1).$$

Como $x_1 = y_1$, temos que $\alpha x_1 = \alpha y_1$, isto é, a primeira coordenada é igual a segunda. Logo, $\alpha u \in W \Rightarrow$ a multiplicação por escalar é válida em W.

Portanto, podemos concluir que W é subespaço vetorial do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$

Exercício 2 *Seja* $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset M(2,2)$. *Mostre que* W *não é um subespaço vetorial de* $M(2,2)$.

Solução: Para mostrarmos que um determinado subconjunto W de um espaço vetorial V **não** é subespaço vetorial, devemos mostrar que uma das propriedades da **Definição 2** da **Aula n.º 2** falha em W.

Sejam $u = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \in W$ e $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in W$. O vetor u pertence a W, porque

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \text{ tal que } u_{11} = 1, u_{12} = 3, u_{21} = 5 \in \mathbb{R} \text{ e } u_{22} = 2.$$

(Tente entender o motivo do vetor v pertencer a W. Diga o motivo no Fórum da disciplina)

Vamos mostrar que a condição da soma não é válida, isto é $u + v \notin W$. De fato,

$$u + v = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 3+0 \\ 5+1 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \notin W$$

Para explicar melhor, escrevamos

$$u + v = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

O vetor $u + v$ não pertence a W, porque $a_{22} = 4 \neq 2$, para pertencer a W o valor da segunda linha na segunda coluna deve ser igual a 2.

Portanto, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ não é subespaço vetorial de $M(2,2)$, porque a condição da soma não é válida em W.

Observamos que, para mostrar que um determinado subconjunto W de um espaço vetorial V não é subespaço vetorial, podemos escolher vetores específicos deste subespaço, pois o que queremos provar é que uma das propriedades de subespaço não vale; se uma das propriedades não vale para vetores específicos, então não vale no geral. Agora, para mostrar que é subespaço, como foi feito no Exercício 1, não podemos escolher vetores específicos, porque podemos escolher um exemplo particular em que a propiedade valha, mas que para outros vetores não seja válida.

Uma outra maneira para mostrar que $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ **não é subespaço vetorial de** $M(2,2)$ **é a seguinte:**

Seja $w = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in W$ e $\alpha = 3$. (Por que o vetor w pertence a W? Responda no Fórum da disciplina)

Vamos mostrar que a multiplicação por escalar não é válida em W.

$$\alpha w = 3 \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \notin W$$

Para explicar melhor, escrevamos

$$\alpha w = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

O vetor αw não pertence a W, porque $b_{22} = 6 \neq 2$. Portanto, a multiplicação por escalar falha em W e, consequentemente, W não é subespaço vetorial de $M(2,2)$.

Observamos que se tivéssemos escolhido $\beta = 1$ teríamos que $\beta w = 1w = w \in W$, mas isto só é válido se $\beta = 1$, para qualquer outro valor de β, $\beta \neq 1$, teremos $\beta w \notin W$. Este é um exemplo para mostrar que não se pode escolher valores específicos para verificar se um determinado subconjunto W de um espaço vetorial V é subespaço vetorial.