Universidade Federal da Paraíba
Universidade Aberta do Brasil - UFPB VIRTUAL
Introdução à Álgebra Linear - 2008.2
Prof.ª Shirley Maria Santos Souza
Tutor José Laudelino de Menezes Neto

Exercícios Resolvidos

Exercício 1 *Verificar se o vetor* $w = (6,3,8) \in \mathbb{R}^3$ *é combinação linear dos vetores* $v_1 = (2,1,2)$ *e* $v_2 = (0,0,1)$.

A resolução deste exercício foi feita a partir das respostas dadas nos Fóruns da disciplina.

Solução: Para isto, devemos encontrar $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $w = xv_1 + yv_2$,

$$(6,3,8) = x(2,1,2) + y(0,0,1) \Rightarrow (6,3,8) = (2x, x, 2x) + (0,0,y).$$

Podemos montar o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x & = & 6 \\ x & = & 3 \\ 2x + y & = & 8 \end{array} \right.$$

Nas duas primeiras equações teremos $x = 3$ e daí encontraremos na terceira equação $y = 2$. Com isso, podemos escrever w como combinação linear dos vetores v_1 e v_2. De fato,

$$3v_1 + 2v_2 = 3(2,1,2) + 2(0,0,1) = (3 \cdot 2, 3 \cdot 1, 3 \cdot 2) + (2 \cdot 0, 2 \cdot 0, 2 \cdot 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (6,3,6) + (0,0,2) = (6,3,8) = w.$$

Exercício 2 *Considere os subespaços* $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 2z\}$ *e* $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 2z + x\}$ *de* $\mathbb{R}^3$*. Determine* $W_1 \cap W_2$*. A soma* $W_1 + W_2$ *é direta?*

A resolução deste exercício foi feita a partir das respostas dadas nos Fóruns da disciplina.

Solução: Seja $v = (x, y, z)$ um vetor qualquer de $W_1 \cap W_2$, encontraremos condições sobre os escalares x, y e z.

Sendo $v = (x, y, z) \in W_1$, então,

$$x = 2z \text{ (Equação 1)}$$

Mas, $v = (x, y, z)$ também pertence a W_2, daí

$$y = 2z + x \text{ (Equação 2)}$$

Substituindo o valor de $x = 2z$ da Equação 1 na Equação 2, $y = 2z + x$, temos, $y = 2z + 2z = 4z$ e, sendo $x = 2z$, segue que, $v = (2z, 4z, z)$. Isto quer dizer que todo vetor $v \in W_1 \cap W_2$ é escrito da seguinte maneira $v = (2z, 4z, z)$, com $z \in \mathbb{R}$. Em outras palavras,

$$W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z) \in R^3; x = 2z \text{ e } y = 4z\}$$

A soma $W_1 + W_2$ não é direta, pois o vetor $(2, 4, 1)$ pertence a $W_1 \cap W_2 \Rightarrow W_1 \cap W_2 \neq \{(0, 0, 0)\}$.

Para treinar: Verifiquem que, de fato, $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 2z\}$ e $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 2z + x\}$ são subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^3$. Qualquer dúvida, perguntem nos Fóruns.

Exercício 3 *Verifique que* $W_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x+y=0 \text{ e } z-t=0\} \subset \mathbb{R}^4$ *é um subespaço vetorial.*

A resolução deste exercício foi feita a partir das respostas dadas nos Fóruns da disciplina.

Solução: O vetor $(x_1, y_1, z_1, t_1) = (-1, 1, 0, 0) \in W_1$, pois $x_1 + y_1 = -1 + 1 = 0$ e $z_1 + t_1 = 0 + 0 = 0$. Logo, W_1 é diferente do vazio.

Para checar se W_1 é subespaço vetorial devemos demonstrar que u, v pertencendo a W_1 a sua soma $u + v$ também pertencerá.

Se $v = (x, y, z, t) \in W_1$, então $v = (x, -x, z, z)$, pois $y + x = 0 \Rightarrow y = -x$ e $z - t = 0 \Rightarrow z = t$. De modo análogo, temos que, $u = (x', y', z', t') \in W_1 \Rightarrow u = (x', -x', z', z')$. Assim,

$$u + v = (\underbrace{x + x'}_{X}, \underbrace{-(x + x')}_{Y}, \underbrace{z + z'}_{Z}, \underbrace{z + z'}_{T}).$$

Logo, $u + v \in W_1$, pois $X = -Y$ e $Z = T$.

Resta verificarmos se a multiplicação por escalar é válida em W_1. Dado $v = (x, y, z, t) \in W_1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que $v = (x, -x, z, z)$ e, assim,

$$\alpha v = \alpha(x, -x, z, z) = (\alpha x, -\alpha x, \alpha z, \alpha z) \in W_1.$$

Portanto, W_1 é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$, porque satisfaz as duas condições necessárias para ser subespaço vetorial (ver a Aula N.º 2).

Agora, vamos ver o que representa geometricamente o subespaço vetorial $W_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x+y=0 \text{ e } z-t=0\} \subset \mathbb{R}^4$. Notemos que os vetores $v_1 = (1, -1, 0, 0)$ e $v_2 = (0, 0, 1, 1)$ pertencem a W_1 e são LI (verifiquem). Observemos também que qualquer outro vetor pertencente a W_1 é combinação linear de v_1 e v_2 (v_1 e v_2 formam uma base para o subespaço vetorial W_1 - Aula n.º 4). Obviamente, por ser um subespaço vetorial, o ponto $(0, 0, 0, 0)$ pertence a W_1. Ora, um ponto e dois vetores LI determinam um plano. Portanto, a representação geométrica de W_1 é um plano.

Observação: Se tivermos um subespaço W e só for possível encontrar um vetor v e todos os demais vetores de W forem combinação linear deste vetor v, então W representa uma reta, pois uma reta é determinada por um ponto e um vetor diretor. Este fato é descrito no

1.º exercício resolvido da Aula n.º 3 quando se mostra o que representa geometricamente a interseção de $W_1 \cap W_2$.

Exercício 4 *O seguinte conjunto de vetores* $A = \{(1,3,1),(2,5,0),(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ *é LI ou LD? O conjunto* A *é uma base do* $\mathbb{R}^3$*?*

A resolução deste exercício foi feita a partir das respostas dadas nos Fóruns da disciplina.

Solução: Consideremos $v_1 = (1,3,1), v_2 = (2,5,0)$ e $v_3 = (0,0,1)$. Para verificarmos se v_1, v_2 e v_3 são LI devemos fazer $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0, a, b, c \in \mathbb{R}$, se a única solução possível for $a = b = c = 0$, então o conjunto A é LI; caso contrário é LD.

$$av_1+bv_2+cv_3 = 0 \Rightarrow a(1,3,1)+b(2,5,0)+c(0,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow (a+2b, 3a+5b, a+c) = (0,0,0)$$

Assim, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + 2b &= 0 \\ 3a + 5b &= 0 \\ a + c &= 0 \end{cases}$$

Na primeira equação temos $a = -2b$ e daí teremos na segunda equação $-b = 0 \Rightarrow b = 0$. Logo, $a = 0$ e $c = 0$. Portanto, o conjunto de vetores $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ é LI, pois a única solução é $a = b = c = 0$.

Como o conjunto A possui 3 vetores LI e a dimensão do $\mathbb{R}^3$ é 3, então o conjunto A é uma base do $\mathbb{R}^3$ (ver Observação 4(i) da seção 3.5.1 do Livro Texto).

Exercício 5 *Seja $V = \mathbb{R}^2$. Consideremos as seguintes bases de V, $\alpha = \{(1,1), (-1,2)\}$ e $\beta = \{(3,0), (2,5)\}$. Determinar a matriz mudança de base $[I]^{\alpha}_{\beta}$ e as coordenadas do vetor $v = (3,4)$ na base β; sabendo que*

$$[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Solução: Como estamos querendo determinar a matriz mudança de base $[I]^{\alpha}_{\beta}$, devemos escrever cada vetor da base α como combinação linear dos vetores da base β. Primeiro, vamos escrever o vetor $(1,1)$ da base α como combinação linear dos vetores da base β:

$$(1,1) = a(3,0) + b(2,5) \Rightarrow (1,1) = (3a,0) + (2b,5b) \Rightarrow (1,1) = (3a+2b,5b)$$

Assim, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 1 &= 3a + 2b \\ 1 &= 5b \end{cases}$$

Logo,

$$b = \frac{1}{5} \text{ e } 1 = 3a + 2b \Rightarrow 1 = 3a + 2\frac{1}{5} \Rightarrow a = \frac{1}{5}.$$

Agora, escreveremos o vetor $(-1,2)$ da base α como combinação linear dos vetores da base β:

$$(-1,2) = c(3,0) + d(2,5) \Rightarrow (-1,2) = (3c,0) + (2d,5d) \Rightarrow (-1,2) = (3c+2d,5d).$$

Resolvendo, teremos que $c = -\frac{3}{5}$ e $d = \frac{2}{5}$.

Portanto, como visto na Aula n.º 5, a matriz mudança de base de α para β é

$$[I]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Consideremos o vetor $v = (3,4)$. As coordenadas do vetor v em relação a base α é

$$[v]_{\alpha} = [(3,4)]_{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.\text{(Verifique)}$$

Sabemos a matriz mudança de base de α para β, então para sabermos as coordenadas do vetor v em relação a base β, basta calcularmos

$$[v]_{\beta} = [I]^{\alpha}_{\beta}[v]_{\alpha} \Rightarrow [v]_{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{15} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

De fato,

$$\frac{7}{15}(3,0)+\frac{4}{5}(2,5)=(\frac{21}{15},0)+(\frac{8}{5},\frac{20}{5})=(\frac{21+24}{15},0+\frac{20}{5})=(\frac{45}{15},4)=(3,4)=v.$$