Universidade Federal da Paraíba

CCAE - Depto. de Ciências Exatas (DCX)

Matemática Elementar - **Resumo das Aulas**

UNIDADE II

Prof. Laudelino (laudelino@dcx.ufpb.br)

Sumário

1 Contagem

Fatorial: Seja $n \in \mathbb{Z}_+$, definimos o fatorial de n por

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

Por exemplo, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120, \quad 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$

`Propriedade:` $n! = n \cdot (n-1)!;$ por convenção, $0! = 1.$

1.1 Permutação

Um arranjo ordenado é chamado de permutação.

Exemplo 1.1 *Quantos números de quatro dígitos distintos podemos formar com os algarismos de 0 a 9?*

Este Exemplo 1.1 é um caso de uma permutação de 4 objetos distintos, escolhidos em um conjunto de 10 objetos distintos,

$$P(10,4) = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

O número de permutações de r objetos distintos, escolhidos entre n objetos distintos é denotado por

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}, n \geq r.$$

Exemplo 1.2 *De quantas maneiras podemos permutar 3 objetos distintos, digamos a,b,c?*

Exemplo 1.3 *Quantas palavras de 3 letras (que podem não fazer sentido) podemos formar a partir da palavra "compilar"?*

Exemplo 1.4 *Dez atletas competem em um evento olímpico. São dadas medalhas de ouro, prata e bronze. De quantas maneiras podem ser dadas as medalhas?*

Exemplo 1.5 *De quantas maneiras se pode selecionar um presidente e um vice-presidente de um grupo de 20 pessoas?*

Exemplo 1.6 *De quantas maneiras 6 pessoas podem se sentar numa fileira de 6 cadeiras?*

1.2 Combinação

Combinação consiste em selecionar r objetos distintos de um conjunto de n objetos distintos, mas sem se importar com a ordem.

`Notação:` $C(n,r) = \binom{n}{r}$.

Para cada uma dessas combinações, existem $r!$ maneiras de ordenar os r objetos escolhidos. Sendo assim, o número de permutações de r objetos distintos, escolhidos entre n objetos distintos, $P(n,r)$, é o produto do número de possíveis escolhas, $C(n,r)$, pelo número de maneiras de ordenar os objetos escolhidos. Logo,

$$P(n,r) = C(n,r) \cdot r! \quad \Rightarrow \quad C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, n \geq r.$$

`Permutação:` Selecionar os objetos verificando a órdem de escolha.

`Combinação:` Selecionar os objetos **sem se importar** com a órdem de escolha.

Exemplo 1.7 *De quantas maneiras podemos escolher 2 objetos distintos de um conjunto de 3 objetos distintos, digamos: a, b, c?*

(a) *Sem se importar com a órdem de escolha.* ***(b)*** *Impontando a órdem de escolha.*

Exemplo 1.8 *Dez atletas competem em um evento olímpico e três serão declarados vencedores. De quantas maneiras podem ser escolhidos os vencedores?*

Exemplo 1.9 *Combinação de 4 objetos distintos 2 a 2. Permutação de 4 objetos distintos 2 a 2.*

Exemplo 1.10 *De quantas maneiras é possível escolher uma comissão de 3 pessoas em um grupo de 12?*

Exemplo 1.11 *Um cofre possui um disco marcado os dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. O segredo do cofre é formado por uma sequência de 5 dígitos distintos. Se uma pessoa tentar abrir o cofre, quantas tentativas deverá fazer (no máximo) para conseguir abrir. (Suponha que a pessoa saiba que o segredo é formado por dígitos distintos)*

Exemplo 1.12 *Calcule $P(m,3)$, sabendo que $C(m,3) = 84$. Em seguida, determine o valor de m.*

Exemplo 1.13 *Em uma reunião social, cada pessoa cumprimenta todas as outras, havendo ao todo 45 apertos de mão. Quantas pessoas havia na reunião?*

1.3 Exercícios (Contagem)

1.1 *Calcule o valor das expressões*

(a) $P(7,2)$ ***(b)*** $P(8,5)$ ***(c)*** $P(6,4)$

1.2 *Calcule o valor das expressões*

(a) $C(10,7)$ ***(b)*** $C(9,2)$ ***(c)*** $C(8,6)$

1.3 *De quantas maneiras diferentes podemos ordenar 9 objetos?*

1.4 *Os 14 times locais de futebol junior estão listados no jornal. Quantas listas são possíveis?*

1.5 *De quantas maneiras pode-se dar o primeiro, segundo e terceiro prêmios em uma competição culinária da qual participam 15 pessoas?*

1.6 *O controle de qualidade quer verificar 25 computadores dos 300 produzidos por dia. De quantas maneiras isso pode ser feito?*

1.7 *De quantas maneiras uma bibliotecária pode selecionar 4 romances de uma coleção de 21 romances?*

1.8 *Um time de futebol tem 18 jogadores entre (11) titulares e reservas. De quantas maneiras pode-se escolher o time titular?*

1.9 *Os nomes que representam as ações nos pregões de uma bolsa de valores estão limitados a três letras. Quantos nomes possíveis existem se as letras não podem ser repetidas?*

1.10 *De quantas maneiras diferentes você pode sentar 11 homens e 8 mulheres em uma fila?*

1.11 *De quantas maneiras pode-se selecionar um júri de 5 pessoas num grupo de 17 pessoas?*

1.12 *As cinco finalistas do concurso Miss Universo são: Miss Japão, Miss Brasil, Miss Argentina, Miss Angola e Miss Portugal. De quantas maneiras os juízes poderão escolher o primeiro, segundo e terceiro lugares neste concurso?*

1.13 *Existem 10 jogadores de futebol de salão entre titulares e reservas, mas apenas João é o único, dentre os jogadores, que joga como goleiro. Nestas condições, de quantas maneiras pode-se escolher o time titular?*

2 Relações em um Conjunto

Uma *relação* R em um conjunto $A \neq \varnothing$ é qualquer subconjunto de $A \times A$.

Quando (a, b) pertence a R, dizemos que "a está relacionado com b", em símbolos aRb.

Seja R uma relação em um conjunto A. A relação R pode ser:

Reflexiva: Uma relação R em A é reflexiva quando para todo elemento $a \in A$, tem-se $(a, a) \in R$, ou seja, $aRa, \forall a \in A$. Em outras palavras, uma relação R em um conjunto A é reflexiva quando todo elemento de A se relaciona consigo mesmo.

Simétrica: Uma relação R em A é simétrica quando (a, b) e (b, a) pertencem a R. Isto é, uma relação R em um conjunto A é simétrica se a está relacionado com b (aRb), obrigatoriamente b deve estar relacionado com a (bRa), e vice-versa.

Antissimétrica: Uma relação R em A é anti-simétrica quando:

$$(a, b) \in R \text{ e } (b, a) \in R \Rightarrow a = b.$$

Se a relacionado com b e b relacionado com a, então a é igual a b.

Transitiva: Uma relação R em A é transitiva quando:

$$(a, b) \in R \text{ e } (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R.$$

2.1 Relações de Ordem

Uma *ordem* em um conjunto $A \neq \varnothing$ é uma relação reflexiva, antissimétrica e transitiva em A.

Um conjunto é chamado de *ordenado* quando temos uma relação de ordem definida nele. Indicamos uma relação de ordem pelo símbolo $\preceq$ (lê-se, "precede"). Resumindo, uma ordem em um conjunto A é uma relação $\preceq$ que satisfaz:

(i) reflexividade: $x \preceq x, \forall x \in A$;

(ii) antissimetria: $x \preceq y$ e $y \preceq x \Rightarrow x = y$;

(iii) transitividade: $x \preceq y$ e $y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$.

Seja A um conjunto com uma relação de ordem $\preceq$:

- $a \in A$ é chamado de *primeiro elemento* (ou *menor elemento*) de A se $a \preceq x, \forall x \in A$;
- $b \in A$ é chamado de *último elemento* (ou *maior elemento*) de A se $x \preceq b, \forall x \in A$.

Exemplo 2.1 *Seja $W = \{a, b, c, d, e\}$, o diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & a & & & & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & & & \\
b & & & & c & & \\
 & \nwarrow & & \nearrow & & \nwarrow & \\
 & & d & & & & e
\end{array}$$

define uma ordem da seguinte maneira $x \preceq y$ se $x = y$ ou se pudermos nos deslocar de x para y no diagrama, sempre nos movendo na direção indicada, isto é, para cima. Observamos, por exemplo, que $e \preceq a$, $d \preceq c$ e $d \preceq a$.

Exemplo 2.2 *Seja R uma relação em $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$ definida por $xRy \Leftrightarrow x \mid y$ ("x divide y", ou seja, y é um múltiplo de x). A relação R é uma ordem em V, 1 é o menor elemento de V de acordo com a ordem R, mas esta ordem R não possui maior elemento. Podemos representar esta ordem em V pelo seguinte diagrama:*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 8 & & \\
 & & \uparrow & & \\
6 & & 4 & & 10 \\
\uparrow & \nwarrow & \uparrow & \nearrow & \uparrow \\
3 & & 2 & & 5 \\
 & \nwarrow & \uparrow & \nearrow & \\
 & & 1 & &
\end{array}$$

Observamos que $5 \preceq 10$, *porque* $10 = 2 \cdot 5$; $2 \preceq 8$, *pois* $8 = 4 \cdot 2$.

Se para quaisquer $x, y \in A$ tivermos $x \preceq y$ ou $y \preceq x$, então $\preceq$ é uma *ordem total* em A. Em outras palavras, um conjunto é *totalmente ordenado*, ou seja, possui uma ordem total, quando quaisquer dois elementos $x, y \in A$ podem ser comparados: $x \preceq y$ ou $y \preceq x$.

Todo subconjunto de um conjunto totaltemente ordenado também é totalmente ordenado. Uma ordem que não é total em um conjunto A, pode definir uma ordem total em algum subconjunto B de A.

Exemplo 2.3 *A ordem R do conjunto V, exibida no Exemplo 2.2, não é uma ordem total de V, pois, por exemplo, não é possível comparar 3 com 4, nem 5 com 8; entretanto o subconjunto $B = \{1, 5, 10\} \subseteq V$ é totalmente ordenado com a ordem R.*

Um conjunto A com uma ordem é *bem-ordenado* (de acordo com esta ordem) quando todo subconjunto $B \subseteq A$ possui primeiro elemento.

Proposição 2.4 *Todo conjunto bem-ordenado de acordo com uma ordem $\preceq$ é totalmente ordenado com esta mesma ordem $\preceq$.*

Demonstração: Seja A um conjunto bem-ordenado. Então, qualquer subconjunto $\{x, y\} \subseteq A$ possui primeiro elemento, $x \preceq y$ ou $y \preceq x \Rightarrow$ quaisquer dois elementos de A podem ser comparados $\Rightarrow A$ é totalmente ordenado. ■

2.2 Relações de Equivalência

Uma *relação de equivalência* em um conjunto $A \neq \varnothing$ é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva em A. Em outras palavras, uma relação R em um conjunto A é uma relação de equivalência quando:

(i) R é reflexiva em A, ou seja, $xRx, \forall x \in A$;

(ii) R é simétrica, isto é, $xRy \Rightarrow yRx$; e

(iii) R é transitiva, ou seja, xRy e $yRz \Rightarrow xRz$.

Vejamos a definição de classe de equivalência, a qual é de extrema importância para relacionar partição de um conjunto com relação de equivalência, vide Proposições 2.5 e 2.6, que serão enunciadas em seguida.

Seja A um conjunto não-vazio com uma relação de equivalência R. Dado $a \in A$, a *classe de equivalência* determinada por a, módulo R, é o subconjunto de A formado por todos os elementos x tais que xRa. Denotamos este subconjunto por

$$\overline{x} = \{a \in A; (x, a) \in R\}.$$

Proposição 2.5 *Toda relação de equivalência em um conjunto define uma partição neste conjunto.*

Demonstração: Sejam A um conjunto, R uma relação de equivalência em A e $\overline{x_i}, i \in I$, as classes de equivalência em relação a R (conjunto finito ou infinito de classes).

Pela definição de partição de um conjunto, devemos provar que $\overline{x_i} \cap \overline{x_j} = \varnothing, i \neq j$ e $\bigcup\limits_{i \in I} \overline{x_i} = A$. Primeiro, mostraremos que as classes $\overline{x_i}, i \in I$, não são vazias.

Como R é reflexiva, todo elemento de A se relaciona consigo mesmo, então, pelo menos, $x_i \in \overline{x_i}, \forall i$, logo $\overline{x_i} \neq \varnothing, \forall i$.

Sejam $\overline{x_i}, \overline{x_j}$ duas classes de equivalência tais que $\overline{x_i} \cap \overline{x_j} \neq \varnothing$. Seja $a \in \overline{x_i} \cap \overline{x_j} \Rightarrow (a, x_i) \in R$ e $(a, x_j) \in R$. Sendo R simétrica, temos $(x_i, a) \in R$, logo, pela transitividade de R

$$(x_i, a) \in R \text{ e } (a, x_j) \in R \Rightarrow (x_i, x_j) \in R,$$

portanto, quando $\overline{x_i} \cap \overline{x_j} \neq \varnothing$ temos que todo elemento relacionado com x_i estará relacionado com x_j e vice-versa, assim, pela definição de classe de equivalência, $\overline{x_i} = \overline{x_j}$.

Obviamente, $\bigcup\limits_{i \in I} \overline{x_i} \subseteq A$. De fato,

$$a \in \bigcup_{i \in I} \overline{x_i} \Rightarrow a \in \overline{x_i} \subseteq A, \text{ para algum } i \Rightarrow a \in A.$$

Seja $a \in A \Rightarrow (a, a) \in R \Rightarrow a \in \overline{a} = \overline{x_i}$, para algum $i \in I \Rightarrow a \in \bigcup\limits_{i} \overline{x_i}$. ■

Proposição 2.6 *Toda partição em um conjunto define uma relação de equivalência neste conjunto.*

Demonstração: Sejam A um conjunto e $A_i, i \in I$ uma partição em A.

Definiremos a seguinte relação em A. $R = \{(a, b) \in A \times A; a, b \in A_i\}$. A relação R assim definida é de equivalência.

1. Para todo $a \in A$, existe algum $i \in I$ tal que $a \in A_i \Rightarrow (a, a) \in R \Rightarrow R$ é reflexiva.

2. Sejam $a, b \in A$ com $(a, b) \in R$, então $a, b \in A_j$, para algum $j \in I \Rightarrow b, a \in A_j \Rightarrow (b, a) \in R \Rightarrow R$ é simétrica.

3. Sejam $a, b, c \in A$ tais que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R \Rightarrow a, b \in A_i$ e $b, c \in A_j$, mas $b \in A_i \cap A_j \neq \varnothing \Rightarrow A_i = A_j \Rightarrow a, b, c \in A_i = A_j \Rightarrow (a, c) \in R \Rightarrow R$ é transitiva.

De 1, 2 e 3, temos que R é, de fato, uma relação de equivalência. ■

2.3 Exercícios (Relações)

2.1 *Para cada uma das relações binárias R a seguir, definidas em $\mathbb{N}$, decida quais dos pares ordenados pertencem a R.*

(a) $xRy \Leftrightarrow x + y < 7$; $(1,3); (2,5); (3,3); (4,3); (3,4); (1,5)$.

(b) $xRy \Leftrightarrow x = y + 2$; $(3,1); (4,2); (5,6); (2,4); (1,3); (12,10); (31,4)$.

(c) $xRy \Leftrightarrow x = y$; $(3,1); (2,2); (4,6); (7,9); (10,10); (20,21); (43,43)$.

(d) $xRy \Leftrightarrow x \geq y$; $(1,3); (2,2); (5,1); (17,54); (35,2); (1,4); (21,9)$.

(e) $xRy \Leftrightarrow 2x + 3y = 10$; $(2,2), (3,1), (1,3)$.

2.2 *Decida quais dos pares dados satisfazem a relação.*

(a) *R é uma relação em $\mathbb{Z}$,* $xRy \Leftrightarrow x = -y$; $(1,-1), (2,2), (1,1), (3,-3), (3,4), (1,3), (-5,-5)$.

(b) *R é uma relação em $\mathbb{Q}$,* $xRy \Leftrightarrow x \leq \dfrac{1}{y}$; $(19,7), (21,4), (33,13), (-3,3), (3,-3), (1,2)$.

(c) *R é uma relação em $\mathbb{R}$,* $xRy \Leftrightarrow x < y$; $(1,\sqrt{2}), (2,2), (\sqrt{3},\frac{1}{2}), (-3,\sqrt{5}), (\sqrt{3},-4), (-1,3)$.

2.3 *Sejam R_1 e R_2 relações em $\mathbb{N}$ definidas por* $xR_1y \Leftrightarrow x$ *divide* y; *e* $xR_2y \Leftrightarrow 5x \leq y$. *Decida quais dos pares ordenados satisfazem as relações correspondentes.*

(a) $R_1 \cup R_2$; $(2,6), (3,17), (2,1)$. ***(b)*** $R_1 \cap R_2$; $(3,6), (1,2), (2,12)$.

(c) R_1^c; $(2,5), (2,8), (4,15), (2,12)$. ***(d)*** R_2^c; $(1,1), (2,10), (4,8)$.

2.4 *Seja $S = \{0,1,2,4,6\}$. Verifique se as relações em S dadas a seguir são reflexivas, simétricas, antisimétricas ou transitivas.*

(a) $R_1 = \{(1,1), (0,0), (2,2), (4,4), (6,6), (1,4)(1,2), (2,4)\}$.

(b) $R_2 = \{(1,1), (2,2), (1,2), (2,1), (2,4), (1,4), (4,2), (6,4), (2,6), (6,2), (4,6)\}$.

(c) $R_3 = \{(1,2), (2,1), (2,4), (4,2)\}$.

2.5 *Seja R uma relação binária em $S = \{1, 2, \ldots, 14, 15\}$ definida por $xRy \Leftrightarrow x$ divide y.*

(a) *Verifique que R é reflexiva.*

(b) *Verifique que R é antisimétrica.*

(c) *Verifique que R é transitiva.*

(d) *R é uma relação de equivalência ou uma relação de ordem?*

2.6 *Seja R uma relação em $B = \{1, 2, 3, \ldots, 11, 12, 13\}$ definida por $xRy \Leftrightarrow x \equiv y(\mod 3)$.*

(a) *Verifique que R é reflexiva.*

(b) *Verifique que R é simétrica.*

(c) *Verifique que R é transitiva.*

(d) *R é uma relação de equivalência ou uma relação de ordem?*

(e) *Se R for uma relação de equivalência, exiba as classes de equivalência e verifique que as classes formam uma partição do conjunto B.*

2.7 *Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $A_1 = \{1, 5, 9\}, A_2 = \{2, 4, 8\}$ e $A_3 = \{3, 6, 7\}$. Verifique se A_1, A_2, A_3 é uma partição de A. Se for uma partição, descreva qual a relação R no conjunto A que é obtida a partir desta partição.*

2.8 *Sejam $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $B_1 = \{1, 5, 9\}, B_2 = \{2, 4, 5, 8\}$ e $B_3 = \{3, 6, 7\}$. Verifique se B_1, B_2, B_3 é uma partição de B. Se for uma partição, descreva qual a relação R no conjunto B que é obtida a partir desta partição.*

2.9 *Sejam $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $C_1 = \{2, 5, 9\}, C_2 = \{1, 4\}$ e $C_3 = \{7, 8\}$. Verifique se C_1, C_2, C_3 é uma partição de C. Se for uma partição, descreva qual a relação R no conjunto C que é obtida a partir desta partição.*

2.10 *Considere o conjunto $A = \{z \in \mathbb{Z}; 0 \leq z \leq 20\}$. Determine todas as classes de equivalência do conjunto A relacionado a relação de equivalência $x \equiv y(\mod 4)$.*

2.11 *Considere o conjunto $B = \{z \in \mathbb{Z}; -10 \leq z \leq 10\}$. Determine todas as classes de equivalência do conjunto B relacionado a relação de equivalência $x \equiv y(\mod 7)$.*

3 Funções

Sejam A e B conjuntos. Uma função $f : A \to B$ é uma regra que permite associar cada elemento do conjunto A a um único elemento, bem determinado, do conjunto B.

$$\begin{array}{rccl} f: & A & \longrightarrow & B \\ & a & \longmapsto & f(a) = b \end{array}$$

O conjunto A é chamado de *domínio* da função f, ou conjunto onde a função é definida, e é denotado por $D(f)$. O conjunto B é chamado de *contradomínio*, ou o conjunto onde a função toma valores. Seja $a \in D(f)$, o elemento $f(a) = b \in B$ é chamado de imagem do elemento a pela função f. O conjunto

$$Im(f) = \{b \in B; \text{ existe } a \in D(f) \text{ com } f(a) = b\} \subseteq B$$

é o conjunto de todas as imagens de elementos de $a \in D(f)$ pela função f, o qual é chamado de *imagem* da função f.

Toda função atende a dois requisitos

1. **Não deve haver exceções:** a fim de que f tenha o conjunto A como domínio, a regra deve fornecer $f(a), \forall a \in A$.

2. **Não deve haver ambiguidades:** a cada $a \in A$, a regra da função f deve fazer corresponder a um único $f(a)$ em B.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : C \to D$ são iguais quando $A = C$, $B = D$ e $f(x) = g(x), \forall x \in A = C$. Ou seja, duas funções são iguais quando têm o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e a mesma regra que associa os elementos dos conjuntos.

O *gráfico* de uma função $f : A \to B$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $A \times B$ formado pelos pares ordenados $(a, f(a))$, on de $a \in A$ é arbitrário. Ou seja,

$$G(f) = \{(a, b) \in A \times B; b = f(a)\}.$$

3.1 Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Podemos classificar uma função $f : A \to B$ em

Injetiva: f é injetiva quando $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ (ou $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$), ou seja, dois elementos da imagem são iguais se eles vem do mesmo elemento do domínio.

Sobrejetiva: f é sobrejetiva quando $\forall y \in B, \exists x \in A$ tal que $f(x) = y$, ou seja, o contradomínio é a imagem da função (não sobra elementos no contradomínio). f sobrejetiva $\Leftrightarrow B = Im(f)$.
Bijetiva: f é bijetiva (ou bijeção) quando for injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo.

Teorema 3.1 *Sejam A e B conjuntos.*

1. *$|A| \leq |B|$ se, e somente se, existe $f : A \to B$ injetiva.*
2. *$|A| \geq |B|$ se, e somente se, existe $g : A \to B$ sobrejetiva.*
3. *$|A| = |B|$ se, e somente se, existe $h : A \to B$ bijetiva.*

Demonstrações: 1. Suponhamos $|A| > |B|$, ou seja, $|A| \geq |B| + 1$. Logo, para toda função $f : A \to B$, existem, pelo menos, dois elementos distintos que irão na mesma imagem, ou seja, existirão $x \neq y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow$ nenhuma f pode ser injetiva.

Se $|A| \leq |B|$, então $|A| = |C|, C \subseteq B$. Assim, definimos uma função $f : A \to B$ que associa cada elemento de A a um único elemento de C de tal maneira que não sobrem elementos de C, como $|A| = |C|$ não haverá repetições. Logo, f é injetiva e $Im(f) = C \subseteq B$.

A demonstração de 2 é análoga a 1. Para demonstrar 3, utiliza-se 1 e 2. $\blacksquare$

Quando existe função bijetiva entre dois conjuntos A e B, então dizemos que A é *equipotente* a B (e vice-versa), em símbolos, $A \simeq B$.

3.2 Composição de funções

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções tais que o domínio de g é igual ao contradomínio da f. Neste caso, podemos definir a *função composta* $g \circ f : A \to C$, que consiste em aplicar primeiro f e depois g. Mais precisamente,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ para todo } x \in A.$$

Propriedades:

1. f e g injetivas $\Rightarrow f \circ g$ injetiva.
2. f e g sobrejetivas $\Rightarrow f \circ g$ sobrejetiva.
3. f e g bijetivas $\Rightarrow f \circ g$ bijetiva.

Seja $f : A \to B$ uma função. A função f possui *função inversa* quando existe $g : B \to A$ tal que $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$, denotamos g por f^{-1}.

Teorema 3.2 *Seja $f : A \to B$ uma função. Então, f é bijetiva se, e somente se, existe $f^{-1} : B \to A$.*

3.3 Contando o Número de Funções entre Conjuntos

Teorema 3.3 *Sejam A e B conjuntos tais que $|A| = m$ e $|B| = n$. Então:*

1. *O número de funções $f : A \to B$ é n^m.*
2. *Se $m \leq n$, então o número de funções injetivas é $\dfrac{n!}{(n-m)!}$*
3. *Se $m \geq n$, então o número de funções sobrejetivas é*

$$n^m - (n-1)^m C(n,1) + (n-2)^m C(n,2) - (n-3)^m C(n-3) + \cdots + [n-(n-1)]^m C(n, n-1).$$

3.4 Exercícios (Funções)

3.1 *Sejam $S = \{1,2,3,4,5\}, T = \{2,4,6,8,10\}$. Determine quais regras abaixo definem uma função, as que não forem função, justifique o motivo.*

(a) $f : S \to T,\ f(1) = 4,\ f(2) = 4,\ f(3) = 8,\ f(2) = 8,\ f(4) = 10,\ f(5) = 10.$

(b) $g : S \to T,\ g(1) = 4,\ g(2) = 2,\ g(3) = 4,\ g(4) = 4.$

(c) $h : S \to T,\ h(1) = 10,\ h(2) = 10,\ h(3) = 10,\ h(2) = 10,\ h(4) = 10,\ h(5) = 10.$

(d) $r : S \to T,\ r(1) = 2,\ r(2) = 4,\ r(3) = 6,\ r(4) = 12,\ r(5) = 10.$

3.2 *Seja $S = \{1,2,3,4,5\}$. Classifique as funções abaixo como: injetiva, sobrejetiva, bijetiva.*

(a) $f : S \to \{3,6,9,12\}, \quad f(1) = 3,\ f(2) = 6,\ f(3) = 12,\ f(4) = 12,\ f(5) = 9.$

(b) $g : S \to \{1,2,3,4,5,6,7\}, \quad g(1) = 2,\ g(2) = 1,\ g(3) = 4,\ g(4) = 3,\ g(5) = 5.$

(c) $h : S \to S, \quad h(1) = 4,\ h(2) = 5,\ h(3) = 2,\ h(4) = 1,\ h(5) = 2.$

(d) $r : S \to \{6,7,8\}, \quad r(1) = 6,\ r(2) = 6,\ r(3) = 7,\ r(4) = 8,\ r(5) = 7.$

3.3 *Sejam f, g, h funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ definidas por $f(x) = 3x$, $g(x) = x^2 + 5$ e $h(x) = 2^x$. Calcule:* ***(a)*** $(f \circ g)(x)$ ***(b)*** $(g \circ f)(x)$ ***(c)*** $(h \circ f)(x)$ ***(d)*** $(f \circ h)(x)$

3.4 *Determine a função inversa f^{-1}, das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:*

(a) $f(x) = 2x + 1$ ***(b)*** $f(x) = -5x + 3$ ***(c)*** $f(x) = 8x - 3$ ***(d)*** $f(x) = -\sqrt{3}x - \sqrt{2}$