Universidade Federal da Paraíba

CCAE - Depto. de Ciências Exatas (DCX)

Matemática Elementar - **Resumo das Aulas**

Unidade I

Prof. Laudelino (laudelino@dcx.ufpb.br)

Sumário

1 Lógica, Tabela Verdade

O Cálculo Proposicional Clássico (CPC) trabalha o esqueleto lógico de uma sentença (Tabela Verdade). As variáveis $x, y, z, z, ldots$, as constantes $c_1, c_2, c_3, \ldots$ e os quantificadores $\forall$ e $\exists$ fazem parte do Cálculo Predicativo, que pode ser visto como uma extensão do CPC.

Sentença (Proposição, ou Declaração) é uma frase que é falsa ou verdadeira, ou seja, é possível atribuir um valor-verdade: V ou F.

Observação 1.1 *Uma Sentença não pode ser V e F ao mesmo tempo.*

Denotaremos Sentenças por letras maiúsculas: A, B, C, ...
(também se utiliza letras minúsculas: p, q, r, s, ...)
Abaixo temos a Tabela Verdade de uma Sentença denominada de A:

A
V
F

A sentença A só pode assumir o valor Verdadeiro (V) ou Falso (F), então, nesta tabela, esgotamos todas as possibilidades.

EXEMPLOS:

(a) Dez é menor que cinco. (Sentença falsa: F.)

(b) Como vai você? (Não é Sentença, porque não é possível atribuir um valor-verdade a uma pergunta.)

(c) Existe vida em outros planetas do universo (É uma Sentença, apenas não sabemos se é V ou F.)

Consideremos as duas Sentenças: A=Pedro é alto. B=Pedro vive em Marte.
Podemos juntar estas sentenças utilizando conectivos lógicos.

$$\text{Pedro é alto} \quad \underbrace{\text{E}}_{\text{conectivo de conjunção}} \quad \text{vive em Marte.} = A \wedge B$$

$$\text{Pedro é alto} \quad \underbrace{\text{OU}}_{\text{conectivo de disjunção}} \quad \text{vive em Marte.} = A \vee B$$

1.1 Conectivos Lógicos $(\wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow, ')$

1.1.1 Conjunção (e, $\wedge$)

Dadas duas Sentenças (Proposições) A e B, a conjunção consiste em juntar estas Sentenças por meio do conectivo "e", $A \wedge B$ (lê-se: "A e B").

Exemplo: A=A Lua é redonda. B=A Lua é furada.

$$A \wedge B = \text{A Lua é redonda } \textbf{e} \text{ a Lua é furada.}$$

$$B \wedge A = \text{A Lua é furada } \textbf{e} \text{ a Lua é redonda.}$$

Construindo a Tabela Verdade para Conjunção: $A \wedge B$ é V se A e B forem ambas V.

$A \wedge B$ é F se pelo menos uma delas for F.

Tabela Verdade da Conjunção:

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

1.1.2 Disjunção (ou, $\vee$)

Dadas duas Sentenças (Proposições) A e B, a conjunção consiste em juntar estas Sentenças por meio do conectivo "ou", $A \vee B$ (lê-se: "A ou B").

Exemplo: A=Fulano mora longe. B=Fulano vive bem.

$$A \vee B = \text{Fulano mora longe } \textbf{ou} \text{ Fulano vive bem.}$$

$$B \vee A = \text{Fulano vive bem } \textbf{ou} \text{ Fulano mora longe.}$$

Construindo a Tabela Verdade para Disjunção: $A \vee B$ é V se pelo menos uma delas for V.

$A \vee B$ é F se ambas forem F.

Tabela Verdade da Disjunção:

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.1.3 Condicional ($\longrightarrow$)

Consideremos duas Proposições A e B. O conectivo Condicional também é chamado de Implicação consiste em:
Se A (Proposição A é a condição), então B (Proposição B é a implicaÃ§Ã£o).
Notação: $A \longrightarrow B$ (lê-se: "A implica B").
Exemplo: A=Cicrano usa óculos. B=Cicrano tem problema na vista.

$A \longrightarrow B =$ **Se** Cicrano usa óculos, **então** Cicrano tem problema na vista.

A="Cicrano usa óculos" pode ser uma sentença falsa (F), mas mesmo assim B="Cicrano tem problema na vista" pode ser verdadeiro (V). Ou seja, algo falso (F), pode implicar numa verdade (V) e a sentença toda $A \longrightarrow B$ continuar sendo verdade (V).

Tabela Verdade do Condicional:

A	B	$A \longrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

1.1.4 Bicondicional ($\longleftrightarrow$)

O conectivo Bicondicional também é chamado de "se, e somente se", ou ainda "se, só se".
$A \longleftrightarrow B$ lê-se "A se, e somente se, B".
Tabela Verdade do Bicondicional:

A	B	$A \longleftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1.1.5 Negação ($'$)

Os conectivos $\wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow$ são conectivos lógicos binários, pois juntam duas Sentenças. Negação é um conectivo unário, porque só usa uma sentença e consiste em negá-la.

Notação: $A' = \sim A = \neg A$ (lê-se: "não A").

Exemplo: A=Chove lá fora. B=Beltrano é alto.

A' = **Não** chove lá fora. B' = Beltrano **não** é alto.

Tabela Verdade da Negação:

A	A'
V	F
F	V

1.2 Juntando Sentenças (Proposições)

Podemos juntar as Sentenças (Proposições) para criar expressões de Sentenças maiores. Estas expressões devem fazer sentido. As expressões válidas (as que fazem sentido) são chamadas de Fórmulas Bem Formuladas (FBF ou WFF).

$$\underbrace{(A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A)}_{\text{é uma FBF}} \qquad \underbrace{A)) \wedge \wedge \longrightarrow BC\vee}_{\text{NÃO é uma FBF}}$$

OBSERVAÇÃO: A Tabela Verdade de uma FBF composta de n Sentenças tem 2^n linhas.

Exemplo 1.2 *Construir a Tabela Verdade de* $((A \vee B) \wedge C) \longrightarrow (B \vee C')$. *Observe que existem três sentenças: A, B e C, logo a tabela verdade tem* $2^3 = 8$ *linhas.*

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \wedge C$	C'	$(B \vee C')$	$((A \vee B) \wedge C) \longrightarrow (B \vee C')$
V	V	V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	F	F
V	V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	V	V	V

Exemplo 1.3 *Construa a Tabela Verdade de* $(A \longrightarrow B) \longleftrightarrow (B' \longrightarrow A')$. *Neste caso, só existem duas sentenças: A e B, portanto a tabela verdade tem* $2^2 = 4$ *linhas.*

A	B	$A \longrightarrow B$	B'	A'	$B' \longrightarrow A'$	$(A \longrightarrow B) \longleftrightarrow (B' \longrightarrow A')$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

1.3 Tautologias

Uma FBF que assume apenas o valor V (verdadade) é chamada de Tautologia. A FBF do Exemplo 1.3 é uma tautologia. A FBF do Exemplo 1.2 NÃO é uma tautologia, pois possui um valor verdade F (falso).

Exemplo 1.4 *Prove que* $A \vee A'$ *é uma tautologia.*

Resposta do Exemplo 1.4: Para provar que $A \vee A'$ é uma tautologia, precisamos construir a Tabela Verdade e verificar se é sempre verdade. Neste caso, só existe uma sentença: A, logo a tabela verdade tem $2^1 = 2$ linhas.

A	A'	$A \vee A'$
V	F	V
F	V	V

Portanto, $A \vee A'$ é uma tautologia, como se pode ver da Tabela Verdade acima.

1.4 Equivalências

Duas FBFs G e H são equivalentes se $G \longleftrightarrow H$ for uma tautologia, ou se as Tabelas Verdades de G e H forem iguais. G e H FBFs equivalentes, escrevemos $G \Longleftrightarrow H$.

Leis de De Morgan: $(A \vee B)' \Longleftrightarrow A' \wedge B' \qquad (A \wedge B)' \Longleftrightarrow A' \vee B'$.

Exemplo 1.5 *Prove a Lei de De Morgan $(A \vee B)' \Longleftrightarrow A' \wedge B'$, ou seja, provar que $(A \vee B)'$ é equivalente a $A' \wedge B'$.*

Resposta do Exemplo 1.5: Provar que $(A \vee B)' \Longleftrightarrow A' \wedge B'$ é o mesmo que provar que $(A \vee B)' \longleftrightarrow A' \wedge B'$ é uma tautologia.

Como $(A \vee B)' \longleftrightarrow A' \wedge B'$ tem duas sentenças: A e B, então a Tabela Verdade tem $2^2 = 4$ linhas.

A	B	$A \vee B$	$(A \vee B)'$	A'	B'	$A' \wedge B'$	$(A \vee B)' \longleftrightarrow A' \wedge B'$
V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Exemplo 1.6 *As seguintes sentenças $p \leftrightarrow q$ e $(p \to q) \wedge (q \to p)$ são logicamente equivalentes.*

Resposta: Observe que a Tabela Verdade de $p \leftrightarrow q$ é a mesma de $(p \to q) \wedge (q \to p)$.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

1.5 Exercícios (Tabela Verdade)

1.1 *Sejam p, q e r sentenças. Utilizando tabela verdade, calcule*

(a) $(\neg p \to \neg q) \wedge (q) \wedge [(p \to r) \to r]$;

(b) $(p \to q) \to [(p \vee r) \to (q \vee r)]$;

(c) $[(p \wedge q) \vee r] \to [p \wedge (q \vee r)]$;

(d) $[(p \vee q) \wedge \neg r] \to (\neg p \vee r)$.

1.2 *Construa as tabelas verdade para verificar quais das sentenças a seguir são tautologias.*

(a) $A \vee \neg A$;

(b) $[\neg(\neg B)] \leftrightarrow B$;

(c) $(p \wedge q) \to q$;

(d) $A \to (A \vee B)$;

(e) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$;

(f) $(\neg p \vee \neg q) \leftrightarrow \neg(p \wedge q)$;

(g) $[(A \to B) \wedge (B \to C)] \to (A \to C)$.

1.3 *Para cada par de sentenças a seguir, verifique quais são logicamente equivalentes.*

(a) $p \to q$ *e* $\neg q \to \neg p$;

(b) $A \to B$ *e* $(A \wedge B) \to \neg A$;

(c) $(p \wedge q) \to \neg p$ *e* $(p \wedge q) \to q$;

(d) $\neg B \to \neg A$ *e* $(A \wedge B) \to B$.

2 Teoria dos conjuntos

Um conjunto é uma coleção de objetos. Denotaremos os conjuntos por letras maiusculas: $A, B, C, \ldots$

Se um objeto x está em um conjunto A, então dizemos que "x pertence ao conjunto A" (notação: $x \in A$); caso o objeto x não pertença ao conjunto A, dizemos que "x não pertence ao conjunto A" (notação: $x \notin A$).

2.1 Exemplos de conjuntos famosos

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ = conjunto dos números naturais. $1 \in \mathbb{N}, 15 \in \mathbb{N}, -1 \notin \mathbb{N}, \sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ = conjunto dos números inteiros. $0 \in \mathbb{Z}, \pi \notin \mathbb{Z}, -13 \in \mathbb{Z}$.

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ = conjuntos dos números racionais. $2 \in \mathbb{Q}, \frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}, -\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$.

$\mathbb{R}$ = conjuntos dos números reais.

$\mathbb{C} = \{a + bi; a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}$ = conjunto dos números complexos.

2.2 Descrevendo um conjunto

Ao descrever um conjunto, devemos listar todos os seus elementos. Para um conjunto finito com n elementos ($n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$), basta listarmos todos os seus n elementos; ou escrevermos a regra que rege os elementos deste conjunto finito; ou listarmos seus elementos iniciais e finais, de tal forma que é possível identificar a regra que rege os elementos do conjunto finito.

Para um conjunto infinito, escrevemos a propriedade que rege os elementos deste conjunto infinito; em alguns casos, listando os primeiros elementos, é possível identificar a regra que rege os elementos do conjunto infinito.

O conjunto C, definido a seguir, é infinito,

$$C = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\} = \{ \quad \underbrace{n \in \mathbb{N}; n \text{ é par}}_{\text{regra que rege os elementos de } C} \quad \}.$$

Observamos que primeiro descrevemos os elementos iniciais de C e foi possível identificar a regra que rege os elementos de C.

Os elementos de um conjunto não tem ordem, ou seja, tanto faz escrever

$$A = \{2, 4, 3, 5, 1\} \text{ ou } A = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

É irrelevante a repetição de elementos:

$$B = \{a, b, b, b, b, b, c, c, c, c, a\} = \{a, b, c\} = \{a, b, a, b, c\} = \{c, a, b\}.$$

Os conjuntos A e B acima são finitos.

Vejamos outros exemplos.

$E = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 5 \text{ e } x \in \mathbb{Z}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ é um conjunto finito. $\frac{1}{2} \notin E$, $\pi \notin E$.

$F = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 5\} = [0, 5]$ é um conjunto infinito. $\frac{1}{2}, \sqrt{2}$ e π são exemplos de elementos que pertencem a F.

$D = \mathbb{Q} = \{ \underbrace{\frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0}_{\text{regra que rege os elementos de } D} \}$ é um conjunto infinito.

2.3 Conjunto vazio

Vimos que ao descrever um conjunto finito com n elementos, existe a possibilidade de n ser igual a 0, ou seja, o conjunto não possui elementos. O conjunto que não tem elementos é chamado de *conjunto vazio* e é representado pelo símbolo $\varnothing$, ou $\{\ \}$. O conjunto vazio é caracterizado por uma regra absurda.

$$S = \{x \in \mathbb{N}; x < 0\} = \varnothing$$

$$F = \{y \in \mathbb{R}; y^2 = -1\} = \varnothing$$

2.4 Relações entre conjuntos

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer.

Inclusão: *o conjunto A está contido no conjunto B* ($A \subseteq B$) quando todo elemento de A é elemento de B ($x \in A \Rightarrow x \in B$), neste caso, dizemos que A é um *subconjunto* de B.

Igualdade: *o conjunto A é igual ao conjunto B* ($A = B$) quando a A e B possuem os mesmos elementos. Para provar que dois conjuntos são iguais, $A = B$, devemos provar que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, ou seja,

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

Inclusão própria: Se $A \subseteq B$ e $A \neq B$, então dizemos que A *está contido propriamente em* B, neste caso, dizemos que A é um *subconjunto próprio* de B. Quando A é um subconjunto próprio de B, existe, pelo menos, um elemento $x \in B$ tal que $x \notin A$.

OBSERVAÇÃO: O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto. Em símbolos, $\varnothing \subseteq A$, qualquer que seja o conjunto A.

2.5 Operações entre conjuntos

Sejam A e B conjuntos contidos em um conjunto universo U.

União: Junção dos elementos de A e B.

$$A \cup B = \{x \in U; x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Interseção: Elementos que estão em A e B ao mesmo tempo, ou seja, os elementos em comum de A e B.

$$A \cap B = \{x \in U; x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Complementar: O complementar de um conjunto A é calculado em relação a um conjunto universo e consiste dos elementos que não pertencem a A.

$$A' = A^c = \{x \in U; x \notin A\}$$

Diferença: A diferença entre o conjunto B e o conjunto A é formada por todos os elementos que estão em B e não estão em A.

$$B - A = \{x \in U; x \in B \text{ e } x \notin A\}$$

Exemplo 2.1 *Sejam* $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, A = \{1,2,3,4,5\}, B = \{2,3,4\}, C = \{9,10\}$ *e* $D = \{5,7,9\}$*. Observamos que* $B \subseteq A$ *e* $B \neq A$*, logo* B *está contido propriamente em* A*.* $A \cup B = \{1,2,3,4,5,2,3,4\} = \{1,2,3,4,5\} = A$*;* $A \cup C = \{1,2,3,4,5,9,10\}$*;* $B - A = \varnothing$*;* $C \cap D = \{9\}$*;* $D - A = \{7,9\}$*.*

2.5.1 Algumas propriedades

Sejam A, B e C conjuntos contidos em um conjunto universo U. Valem as propriedades:

União	**Interseção**
1. $A \cup \varnothing = A$	1. $A \cap \varnothing = \varnothing$
2. $A \cup A = A$	2. $A \cap A = A$
3. $A \cup B = B \cup A$	3. $A \cap B = B \cap A$
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
5. $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$	5. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Complementar

1. $(A^c)^c = A$
2. $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$
3. $\varnothing^c = U$
4. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (Lei de De Morgan)
5. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (Lei de De Morgan)

2.6 Produto Cartesiano

Sejam A, B dois conjuntos quaisquer. O *produto cartesiano* de A e B, denotado por $A \times B$, é definido por

$$A \times B = \{(a, b); a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

$A \times B$ é o conjunto formado por todos os pares ordenados com primeira coordenada em A e segunda coordenada em B.

Dois pares ordenados (a, b) e (c, d), pertencentes a um produto cartesiano $A \times B$, são iguais quando $a = c$ e $b = d$, ou seja,

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d.$$

A operação de produto cartesiano não é comutativa, ou seja, existem conjuntos A e B tais que $A \times B \neq B \times A$.

Podemos generalizar o conceito de produto cartesiano. Sejam A_1, A_2 e A_3 conjuntos, sabemos calcular $A_1 \times A_2$, consideremos $C = A_1 \times A_2$, ora C é um conjunto, logo podemos calcular $C \times A_3 = (A_1 \times A_2) \times A_3 = A_1 \times A_2 \times A_3$. Seguindo este raciocínio, podemos fazer o produto cartesiano de n conjuntos, $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Quando $A = A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, temos a notação

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = A^n.$$

O produto cartesiano é uma operação associativa: $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.

2.7 Conjunto das partes

Dado um conjunto A, podemos formar um novo conjunto cujos elementos são os subconjuntos de A. Este novo conjunto é chamado de conjunto das partes de A, denotado por $\mathcal{P}(A) = P(A)$.

$$\mathcal{P}(A) = \{B; B \subseteq A\}.$$

OBSERVAÇÃO: Se o conjunto A tem n elementos, $n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, então $\mathcal{P}(A)$ possui 2^n elementos.

2.8 Quantidade de Elementos de Conjuntos

Sejam A um conjunto com m elementos. Denotamos a quantidade de elementos de A (cardinalidade de A) por

$$|A| = m \quad \text{(outras notações: } n(A) = \#A\text{)}.$$

Assim, temos que $|P(A)| = 2^{|A|} = 2^m$.

CURIOSIDADE: Os conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ possuem a mesma quantidade de elementos, ou seja, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ ($\aleph_0$ é um cardinal transfinito e é chamado de "aleph zero").

Fórmulas: Sejam A, B, C subconjuntos de um conjunto universo U. Então:

- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$;
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$;
- $|A - B| = |A| - |A \cap B|$;
- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Exemplo 2.2 *Sejam* $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{4, 5\}$*. Determine* $|A \cup B|$, $|A \times B|$ *e* $|P(A)|$.

Resposta: Temos $|A| = 3$, $|B| = 2$ e, como $A \cap B = \varnothing$, $|A \cap B| = 0$, logo

$$|A \cup B| = 3 + 2 - 0 = 5, \qquad |A \times B| = 3 \cdot 2 = 6 \qquad \text{e} \qquad |P(A)| = 2^3 = 8.$$

Exemplo 2.3 *Um pesquisador de opinião pública entrevistou 35 eleitores, todos apoiando o referendo S, o referendo N, ou ambos, e descobriu que 14 apoiam o referendo S e 26 o referendo N. Quantos eleitores apoiam ambos os referendos S e N ao mesmo tempo?*

Resposta: Definimos os seguintes conjuntos

$$A = \{x; x \text{ apoia o referendo S }\} \quad \text{e} \quad B = \{x; x \text{ apoia o referendo N }\}.$$

Então, $|A| = 14$ e $|B| = 26$. Como o pesquisador entrevistou ao todo 35 eleitores que apoiam tanto o referendo S, o referendo N, ou ambos, logo $|A \cup B| = 35$. Queremos saber quantos eleitores apoiam ambos os referendos ao mesmo tempo, ou seja, queremos calcular $|A \cap B|$. Assim,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad \Rightarrow \quad 35 = 14 + 26 - |A \cap B| \quad \Rightarrow \quad |A \cap B| = 40 - 35 = 5.$$

Portanto, 5 eleitores apoiam os referendos S e N ao mesmo tempo.

Exemplo 2.4 *Um grupo de estudantes planeja encomendar pizzas, sabendo que 13 comem pizza sabor mussarela, 10 comem pizza sabor quatro queijos, 12 comem de calabresa, 4 comem tanto mussarela e quatro queijos, 5 comem tanto quatro queijos e calabresa, 7 comem tanto mussarela e calabresa, e 3 comem os três sabores, quantos estudantes há no grupo?*

Dica: Definimos os conjuntos

$$M = \{x; x \text{ come pizza sabor mussarela}\},$$

$$Q = \{x; x \text{ come pizza sabor quatro queijos}\},$$

$$C = \{x; x \text{ come pizza sabor calabresa}\}.$$

O objetivo é calcular $|M \cup Q \cup C|$.

Exemplo 2.5 *Um feirante vende brócolis, cenoura e quiabo. Em um dia, o feirante atendeu 207 clientes, desses clientes: 114 compraram brócolis, 152 compraram cenouras, 25 compraram quiabo, 64 compraram brócolis e cenoura, 12 compraram cenoura e quiabo, e 9 compraram os três produtos. Quantos clientes compraram brócolis e quiabo?*

Dica: Definimos os conjuntos $B = \{x; x \text{ comprou brócolis}\}, C = \{x; x \text{ comprou cenoura}\}$, $Q = \{x; x \text{ comprou quiabo}\}$. O objetivo é calcular $|B \cap Q|$. (Resposta: $|B \cap Q| = 17$)

2.9 Exercícios (Teoria dos Conjuntos)

2.1 *Se* $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$*, determine os conjuntos*

(a) $A = \{x \in U; x \text{ é par}\}$ *(b)* $B = \{x \in U; x \text{ é ímpar}\}$

(c) $C = \{x \in U; x \text{ é múltiplo de } 3\}$ *(d)* $D = \{x \in U; x \text{ é múltiplo de } 10\}$

2.2 *Descreva cada um dos seguintes conjuntos listando seus elementos:*

(a) $A = \{x \in \mathbb{Z}; -1 < x \leq 2\}$; ***(b)*** $F = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - 4x + 4 = 0\}$; ***(c)*** $H = \{x \in \mathbb{Z}; 5 < x < 6\}$.

2.3 *Sendo* $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{1, 3, 4\}$ *e* $D = \{1, 2, 3, 4\}$*, classifique como V (Verdadeiro) ou F (Falso) cada sentença abaixo e justifique:*

(a) $A \subseteq D$ ***(b)*** $A \subseteq B$ ***(c)*** $B \subseteq C$ ***(d)*** $D \supseteq B$ ***(e)*** $C = D$

2.4 *Quais das igualdades são verdadeiras (justifique as que forem falsas)*

(a) $\{a, a, b, a\} = \{b, a\}$ ***(b)*** $\{1, 2, 3, 4\} = \{4, 3, 1, 2\}$ ***(c)*** $\{\clubsuit, \heartsuit, \heartsuit, \spadesuit\} = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$

2.5 *Considere* $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *conjunto universo. Sejam* $A = \{1, 2, 4\}, B = \{2, 3, 5\}$ *e* $C = \{1, 2, 4, 5\}$ *subconjuntos de* U*. Calcule:*

(a) $A \cup B$ ***(b)*** $A \cap B$ ***(c)*** $A - B$ ***(d)*** $B - A$ ***(e)*** $A - C$ ***(f)*** A^c ***(g)*** B^c

2.6 *Seja* $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ *conjunto universo. Considere os conjuntos* $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f, g\}$ *e* $C = \{b, d, e, g\}$*. Calcule:*

(a) $A - B$ ***(b)*** $C - B$ ***(c)*** $A - (B \cap C)$

(d) $(A \cup C) - B$ ***(e)*** $(A \cup B) - (A \cap C)$ ***(f)*** B^c

2.7 *Seja* $U = \{1, 2, 3, \ldots, 8, 9, 10\}$ *o conjunto universo.*

Considere os seguintes subconjuntos de U*,*

$A = \{2, 3, 6, 7, 10\}, B = \{1, 3, 4, 6, 8, 10\}$, $C = \{4, 5, 9\}$. *Calcule:*

(a) $A \cup C$ ***(b)*** $C \cap A$

(c) *Descreva os elementos do conjunto* $D = \{x \in U; x \text{ é par }\}$. ***(d)*** $(D \cap B) - A$.

2.8 *Dados os conjuntos* $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4\}$ *e* $C = \{1, 2, 4\}$, *determine o conjunto* X *tal que* $X \cup B = A \cup C$ *e* $X \cap B = \varnothing$

2.9 *Determine o conjunto* W *tal que:* $\{a, b, c, d\} \cup W = \{a, b, c, d, e\}$,
$\{c, d\} \cup W = \{a, c, d, e\}$ *e* $\{b, c, d\} \cap W = \{c\}$.

2.10 *Determine o conjunto* Y *sabendo que* $Y \subseteq \mathbb{Z}$, $Y \cap \{1, 4, 5, 10\} = \{4, 5\}$,
$Y \cup \{0, 4, 5, 8, 9\} = \{0, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *e* $Y \subseteq \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12\}$.

2.11 *Determine* $P(S)$ *para:* ***(a)*** $S = \{a, b, c\}$ ***(b)*** $S = \{5, 7\}$

2.12 *Considere os conjuntos* $J = \{a, b\}$, $K = \{1, 2, 3\}$ *e* $L = \{2, 3\}$. *Calcule:*

(a) $J \times K$ ***(b)*** $K \times J$ ***(c)*** $L \times L = L^2$ ***(d)*** $L \times J$

2.13 *Sejam* $A = \{2, 4, 5, 6, 8\}, B = \{1, 4, 5, 9\}, C = \{x \in \mathbb{Z}; 2 \leq x \leq 5\}$ *subconjuntos de* $U = \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$. *Calcule:*

(a) $(A \cap B)'$ ***(b)*** $C - B$ ***(c)*** $(C \cap B) \cup A'$ ***(d)*** $(B - A)' \cap (A - B)$

(e) $(C' \cup B)'$ ***(f)*** $(B \cap C) \times (A \cap B)$ ***(g)*** $B \times C$ ***(h)*** $|P(A)|$ ***(i)*** $P(A \cap B)$

2.14 *Todos os convidados de uma festa bebem café ou chá; 13 convidados bebem café, 10 bebem chá e 4 bebem café e chá. Quantas pessoas tem neste grupo?*

2.15 *Em um grupo de 42 turistas, todos falam inglês ou francês. Sabendo que 35 falam inglês e 18 falam francês, responda:*

(a) *Quantos turistas falam inglês e francês ao mesmo tempo? (Resposta: 11)*

(b) *Quantos turistas falam apenas inglês e não falam francês?*

2.16 *Numa pesquisa, verificou-se que, das pessoas consultadas, 100 gostavam de física, 150 gostavam de matemática, 20 gostavam das duas matérias (matemática e física) e 110 não gostavam de nenhumas dessas disciplinas. Quantas pessoas foram consultadas? (Resposta: 340)*

2.17 *Entre 214 clientes de um banco que tem conta corrente ou poupança, 189 tem conta corrente, 73 tem poupança normal, 114 poupança multidata, e 69 tem tanto poupança normal quanto conta corrente. Não é permitido um cliente ter poupança normal e multidata ao mesmo tempo. Responda:*

(a) *Quantos clientes tem conta corrente e poupança multidata? (Resposta: 93)*

(b) *Quantos clientes tem conta corrente e não tem poupança? (Resposta: 27)*

2.18 *Uma pesquisa dentre 150 estudantes revelou que 83 são proprietários de carros, 97 possuem bicicletas, 28 tem motocicletas, 53 são donos de carros e bicicletas, 14 tem carros e motocicletas, 7 possuem bicicletas e motocicletas, e 2 tem todos os três.*

(a) *Quantos estudantes possuem apenas bicicletas? (Resposta: 39)*

(b) *Quantos estudantes não tem qualquer dos três? (Resposta: 14)*

2.19 *Sejam* A *e* B *dois conjuntos, onde* $A \cup B$ *possui 134 elementos e* $A \cap B$ *possui 49 elementos. Se* A *possui exatamente 15 elementos a mais do que* B*, então qual o número de elementos de* A*? (Resposta: o conjunto* A *tem 99 elementos)*