UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA – UFPB
CENTRO DE CIÊNCIAS APLIACADAS E EDUCAÇÃO – CCAE
PROJETO PROTUT 2019

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS DE CÁLCULO

DERIVADAS

Este material foi desenvolvido, durante o ano de 2019, no projeto de Tutoria da UFPB intitulado ***Tutoria da Disciplina de Cálculo 1 para o curso de Licenciatura em Ciências da Computação (LCC)***, coordenado pelo Professor José Laudelino.

O material consiste de questões resolvidas pelos tutores participantes do projeto, sobre o assunto de derivadas, e tem por finalidade servir de texto de apoio para os estudantes da disciplina de Cálculo 1.

Questões 1 a 4 foram resolvidas pelo tutor Heitor Moreira Carneiro de Oliveira.
Questões 5 a 8 foram resolvidas pelo tutor Wellerson Alex Brito da Silva.
Questões 9 a 12 foram resolvidas pelo tutor Josinaldo de P. Bezerra Junior.

Questões resolvidas pelo tutor: Heitor Moreira Carneiro de Oliveira

1) Seja g(x) = x^2 - 7x + 8, utilizando a definição de derivada, calcule g'(-2), ou seja, calcule: $\lim\limits_{x \to -2} \frac{g(x) - g(-2)}{x + 2}$.

Resposta:

$$\lim_{x \to -2} \frac{g(x) - g(-2)}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 7x + 8 - ((-2)^2 - 7(-2) + 8)}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 7x + 8 - (4 + 14 + 8)}{x + 2} = \frac{x^2 - 7x + 8 - (26)}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 7x - 18}{x + 2}$$

Resolvendo a equação de 2º grau para encontrar as raízes:

x^2 -7x -18 → $\Delta = (-7)^2 - 4 * 1 * -18 = 49 + 72 = 121$

$$x_1 = \frac{7 + 11}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{121}}{2*1} \qquad x_2 = \frac{7 - 11}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

escrevendo a equação do 2º grau em forma de: a(x-x_1)(x-x_2)

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(x - 9)(x + 2)}{x + 2} = \lim_{x \to -2} x - 9 = \lim_{x \to -2} -2 - 9 = \boldsymbol{-11}$$

2) Calcule a derivada da função constante f(x) = $\frac{9}{4}$**.**

Resposta: para f(x)= $\frac{9}{4}$, a derivada para essa função é igual a 0, pois é uma constante.

3) Calcule a derivada da função: $x^4 cos\ x$

Resposta:

$(x^4 cos\ x)'$ = $(x^4)'$ cos x + x^4 (cos x)'=

= $4x^3$ cos x + x^4 (- sen x) =

= $4x^3$ cos x - x^4 sen x

4) Calcule a derivada da função f(x) = $\frac{8x^5 ln\, x}{e^x}$.

Resposta:

Aplicando a regra da derivação do quociente de funções:

f'(x) = $\left(8\,\frac{x^5 ln\, x}{e^x}\right)'$ = $8\left(\frac{(x^5 ln\, x)'\, e^x - x^5 ln\, x\ (e^x)'}{(e^x)^2}\right)$

para calcular a derivada de $x^5 ln\, x$, é aplicada a regra do produto:

$(x^5)'\ ln\, x + \ x^5(ln\, x)'$ = $5x^4\ ln\, x\ +\ x^5\ \frac{1}{x}\ =\ 5x^4\ ln\, x\ +\ x^4$

aplicando o resultado de volta a equação principal:

f'(x) = 8 $\left(\frac{(5x^4 ln\, x + x^4)\ e^x - (x^5 ln\, x\ e^x)}{(e^x)^2}\right)$

f'(x) = 8 $\left(\frac{x^4 e^x[(5\ ln\, x + 1) - (x\ ln\, x)]}{e^{2x}}\right)$

f'(x) = 8 $\left(\frac{x^4(5\ ln\, x + 1 - x\ ln\, x)}{e^x}\right)$

f'(x) = $\frac{8x^4(5\ ln\, x + 1 - x\ ln\, x)}{e^x}$

Questões resolvidas pelo tutor: Wellerson Alex Brito da Silva

5) Considere g(x)= $5x^2 - 2$. Calcule, pela definição de derivada, $g'(3)$.

Resposta:

$g(3) = 5 * 3^2 - 2 = 5 * 9 - 2 = 43$

$$g'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{5x^2 - 2 - 43}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{5x^2 - 45}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{5(x^2 - 9)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{5(x+3)(x-3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} 5\,(x+3) = 5\,(3+3) = 5\,(6) = 30$$

Observação: $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x+3)(x-3)$

6) Utilizando a regra de derivação do produto, calcule a derivada da função

$$\sin x \ \cos x$$

Resposta:

$$(\sin x \ \cos x)' = (\sin x)' \ \cos x + \sin x \ (\cos x)' =$$
$$= \cos x \ \cos x + \sin x \ (-\sin x) =$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

7) Seja $h(x) = \frac{3x^3}{3-x}$ **.** Calcule:

(a) $h'(x)$

(b) $h'(-1)$

Resposta:

(a)

$$h'(x) = \frac{(3x^3)'(3-x) - 3x^3(3-x)'}{(3-x)^2} = \frac{9x^2(3-x) + 3x^3}{(3-x)^2}$$

(b)

$$h'(-1) = \frac{9(-1)^2\big(3-(-1)\big) + 3(-1)^3}{\big(3-(-1)\big)^2} = \frac{9\ (3+1) + 3(-1)}{(3+1)^2} =$$

$$= \frac{9\ (4)-3}{(4)^2} = \frac{36-3}{16} = \frac{33}{16}$$

8) Calcule a derivada da função $x^4 + 2e^x - \ln x$

Resposta:

$$(x^4 + 2e^x - \ln x)' = (x^4)' + (2e^x)' - (\ln x)' = 4x^3 + 2e^x - \frac{1}{x}$$

Questões resolvidas pelo tutor: Josinaldo de P. Bezerra Junior

9) Seja f(x) = 2x + 8, utilizando a definição de derivadas, calcule f'(3), ou seja calcule

$$f'(3)= \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} .$$

Solução:

Como

$$f(x) = 2x + 8$$

temos que

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 8$$
$$f(3) = 6 + 8 = 14$$

Substituindo na equação,

$$f'(3)= \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{2x+8 - (14)}{x-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(3)= \lim_{x \to 3} \frac{2x - 6}{x-3}$$

Podemos analisar que ocorre uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ na última equação anterior, sendo assim, vamos simplificar fazendo $2x - 6 = 2(x - 3)$,

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{2x - 6}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{2(x-3)}{x-3} \Rightarrow f'(3) = \lim_{x \to 3} 2 = 2$$

10) Utilizando as regras de derivação, calcule a derivada da função

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

Solução:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$$

11) Utilizando a regra de derivação do quociente, calcule a derivada da função

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 2}$$

Solução:

Aplicando a regra do quociente na função temos,

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{((2x + 3)(x-2)) - ((x^2 + 3x + 1)(1))}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x^2 - 4x + 3x - 6) - (x^2 + 3x + 1)}{(x - 2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x^2 - 4x + 3x - 6 - x^2 - 3x - 1}{(x - 2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 7}{(x - 2)^2}$$

13) Calcule a derivada da função:

$$S(x) = -2x^5 + 4\ln x - 3xe^x$$

Solução:

Fazendo de modo separado com cada termo da função S(x):

$$h(x) = -2x^5 \Rightarrow h'(x) = -10x^4$$

$$f(x) = 4\ lnx \Rightarrow \boldsymbol{f'(x)} = 4\frac{1}{x}$$

Para o termo abaixo, precisamos utilizar a regra do produto de derivação

$$g(x) = 3xe^x \Rightarrow g'(x) = (3x)'e^x + (e^x)'\,3x = 3e^x + 3xe^x$$

Aplicamos os resultados na função original

$$S(x) = h(x) + f(x) + g(x)$$

$$S'(x) = h'(x) + f'(x) + g'(x)$$

$$S'(x) = -10x^4 + 4\frac{1}{x} + 3e^x + 3xe^x$$