Curvas Design e Animação

José Laudelino de M. Neto

Professor do Depto. de Ciências Exatas (DCX) - CCAE - UFPB

Rio Tinto, outubro de 2017

V Semana de Matemática - UFPB - Campus IV - Litoral Norte

Curvas Planas

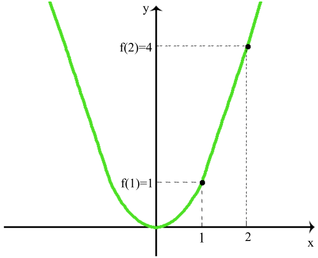


Figura: Gráfico de $f(x) = x^2$.

Este gráfico, de certa forma, não nos dá direção por onde devemos percorrê-lo.

Curvas Planas

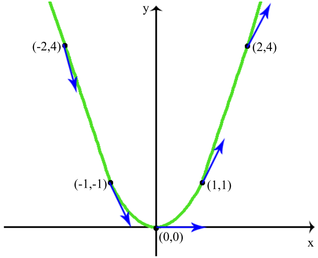


Figura: Curva $F(t) = (t, t^2)$.

Podemos reescrever a função $f(x) = x^2$ por meio de uma parametrização da forma: $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definida por $F(t) = (t, t^2)$.
A derivada em cada ponto desta parametrização, $F'(t) = (1, 2t)$ nos dá vetores tangentes a curva que definem uma direção por onde podemos percorrer a curva $F(t)$.

Curvas Planas

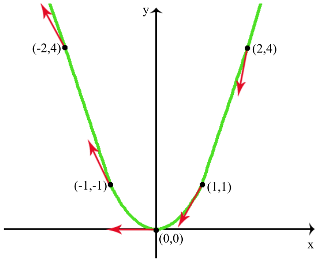


Figura: Curva $G(t) = (-t, t^2)$ semelhante a $F(t)$ mas com direção contrária.

$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $G(t) = (-t, t^2)$ é uma reparametrização da curva $F(t) = (t, t^2)$. Ambas possuem o mesmo traço.
Vetores tangentes em cada ponto de $G(t)$: $G'(t) = (-1, 2t)$.

Curvas Planas - Reparametrização

Consideremos os pontos $P_0 = (0,0)$ e $P_1 = (2,4)$.
Objetivo: utilizando a curva $F(t) = (t, t^2)$, queremos fazer com que $\widetilde{F}(0) = P_0$ e $\widetilde{F}(1) = P_1$.

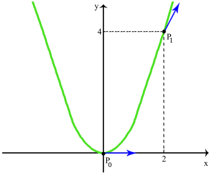
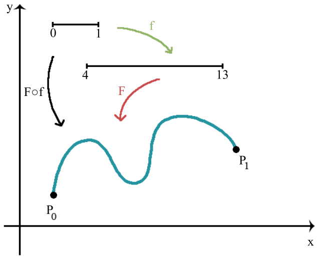


Figura: Utilizando curva $F(t) = (t, t^2)$, obter $\widetilde{F}(0) = P_0$ e $\widetilde{F}(1) = P_1$.

Observamos que $F(0) = (0,0) = P_0$, $F(1) = (1,1) \neq P_1$ e $F(2) = (2,4) = P_1$.
$f : [0,1] \to [0,2], f(t) = 2t$, compomos $\widetilde{F} = F \circ f = (2t, 4t^2)$.

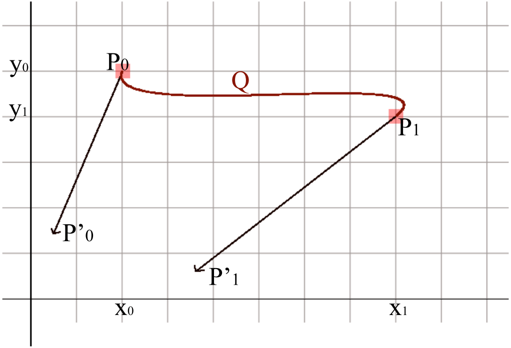
Curvas Planas - Reparametrização

Sempre podemos considerar que trabalhamos com curvas da forma $F : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, onde $F(0) = P_0$ é o ponto inicial e $F(1) = P_1$ é o ponto final.

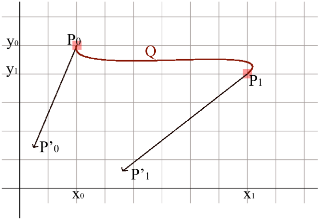


Curvas de Hermite

Ao invés de utilizar uma curva já definida, vamos marcar pontos e vetores no plano para definir uma curva que passa por eles (método de interpolação).



Calculando Curvas de Hermite



$$Q(t) = at^3 + bt^2 + ct + d, \qquad Q(0) = P_0, \qquad Q(1) = P_1$$

$$Q'(t) = 3at^2 + 2bt + c, \qquad Q'(0) = P'_0, \qquad Q'(1) = P'_1$$

Calculando Curvas de Hermite

$Q(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$

$Q'(t) = 3at^2 + 2bt + c$

$$\begin{cases} Q(0) & = & P_0 & \Rightarrow & d & = & P_0 \\ Q(1) & = & P_1 & \Rightarrow & a+b+c+d & = & P_1 \\ Q'(0) & = & P'_0 & \Rightarrow & c & = & P'_0 \\ Q'(1) & = & P'_1 & \Rightarrow & 3a+2b+c & = & P'_1 \end{cases}$$

Resolvemos o sistema para obter a, b, c, d em função de P_0, P_1, P'_0, P'_1.

Logo, $d = P_0$, $\quad c = P'_0$,

$$\begin{cases} a+b & = & P_1 - P'_0 - P_0 \\ 3a+2b & = & P'_1 - P'_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a & = & 2(P_0 - P_1) + P'_0 + P'_1 \\ b & = & 3(P_1 - P_0) - 2P'_0 - P'_1 \end{cases}$$

Calculando Curvas de Hermite

$$Q(t) = \underbrace{[2(P_0 - P_1) + P_0' + P_1']}_{a} t^3 + \underbrace{[3(P_1 - P_0) - 2P_0' - P_1']}_{b} t^2 + \\ + \underbrace{P_0'}_{c} t + \underbrace{P_0}_{d}.$$

Reescrevemos

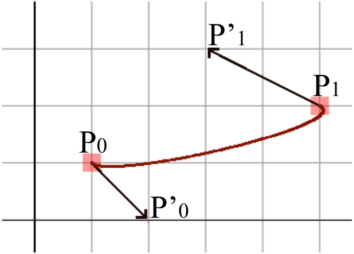
$$Q(t) = \underbrace{(2t^3 - 3t^2 + 1)}_{p_1(t)} P_0 + \underbrace{(-2t^3 + 3t^2)}_{p_2(t)} P_1 + \\ + \underbrace{(t^3 - 2t^2 + t)}_{p_3(t)} P_0' + \underbrace{(t^3 - t^2)}_{p_4(t)} P_1'.$$

As funções $p_i(t), i = 1, \ldots, 4$, funcionam como uma base na construção da curva $Q(t)$.

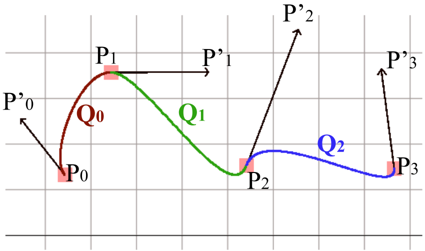
Exemplo de Curva de Hermite

Pontos: $P_0 = (1, 1)$, $P_1 = (5, 2)$, vetores $P'_0 = (2, -1)$, $P'_1 = (-2, 1)$.

Curva gerada: $Q(t) = (-9t^3 + 12t^2 + t + 1,\ -2t^3 + 4t^2 - t + 1)$.



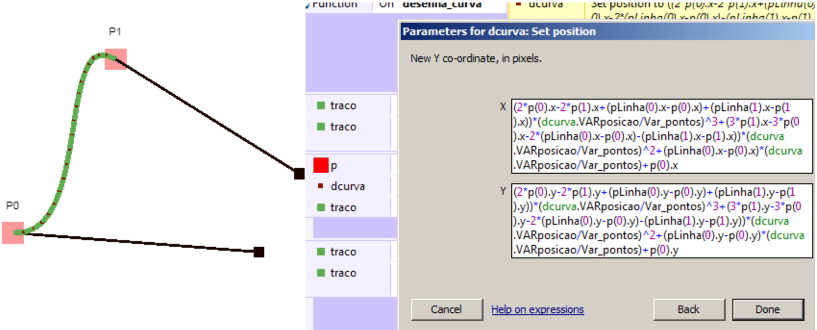
Conectando Curvas de Hermite



Conectamos três Curvas de Hermite
$Q_0(t)$ (gerada por P_0, P_1, P'_0, P'_1), $Q_1(t)$ (gerada por P_1, P_2, P'_1, P'_2), e $Q_2(t)$ (gerada por P_2, P_3, P'_2, P'_3).

Implementando Curvas de Hermite no C2

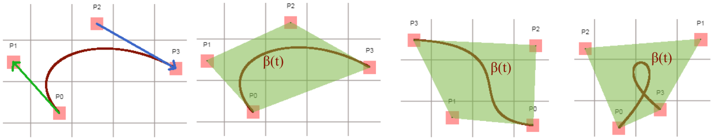
C2 = programa de criação de jogos Construct 2 (www.scirra.com).



$$Q(t) = (2P_0 - 2P_1 + P_0' + P_1')t^3 + (3P_1 - 3P_0 - 2P_0' - P_1')t^2 + P_0't + P_0.$$

Curvas de Bezier

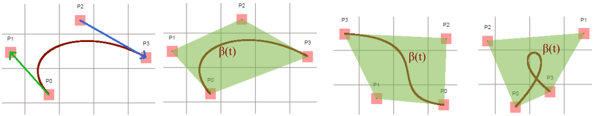
As Curvas de Bézier não são curvas do tipo de interpolação, são curvas de aproximação. Foram desenvolvidas por Pierre Bézier com a finalidade de criar design de carros para empresa Renault.



(a) (b) (c) (d)

Curvas de Bézier cúbicas: Utiliza quatro pontos de controle, por exemplo, P_0, P_1, P_2, P_3, com a curva conectando os pontos P_0 a P_3, e P_1 e P_2 como pontos auxiliáres para gerar os vetores $\overrightarrow{P_0P_1}$ e $\overrightarrow{P_2P_3}$, Figura (a). A curva fica inscrita no poligono de controle gerado pelo fecho convexo de P_0, P_1, P_2, P_3, Figuras (b), (c), (d).

Calculando Curvas de Bezier cúbicas

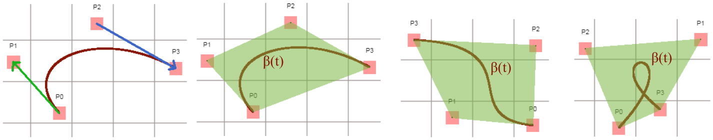


(a) (b) (c) (d)

$$\beta(t) = at^3 + bt^2 + ct + d, \qquad \beta'(t) = 3at^2 + 2bt + c,$$

$$\beta(0) = P_0, \qquad \beta(1) = P_3, \qquad \beta'(0) = 3\overrightarrow{P_0P_1}, \qquad \beta'(1) = 3\overrightarrow{P_2P_3}.$$

Calculando Curvas de Bezier cúbicas

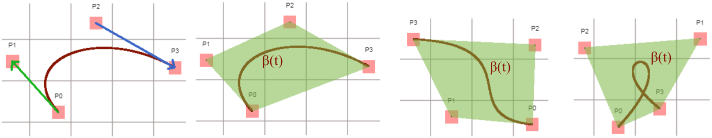


(a) (b) (c) (d)

$$\beta(t) = at^3 + bt^2 + ct + d.$$

$$\begin{aligned} a &= P_3 - 3P_2 + 3P_1 - P_0, \\ b &= -6P_1 + 3P_0 + 3P_2, \\ c &= 3P_1 - 3P_0, \\ d &= P_0. \end{aligned}$$

Calculando Curvas de Bezier cúbicas



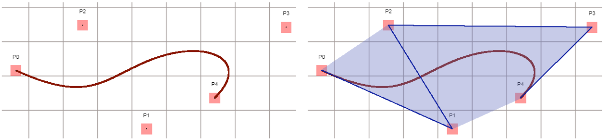
(a) (b) (c) (d)

$$\beta(t) = \underbrace{(-t^3 + 3t^2 - 3t + 1)}_{p_0(t)} P_0 + \underbrace{(3t^3 - 6t^2 + 3t)}_{p_1(t)} P_1 + + \underbrace{(-3t^3 + 3t^2)}_{p_2(t)} P_2 + \underbrace{t^3}_{p_3(t)} P_3$$

Fórmula Geral das Curvas de Bézier

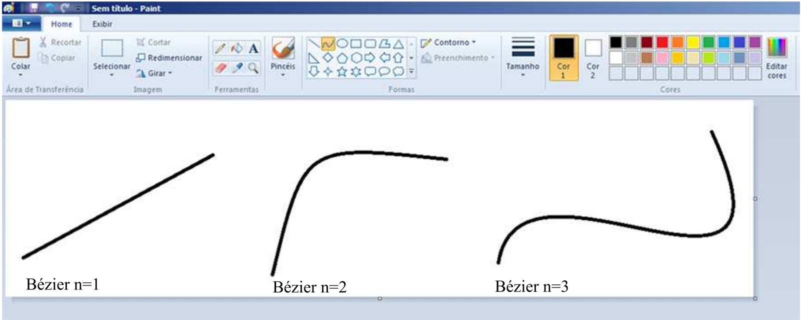
$$\beta(t) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{n!}{i!(n-i)!} \right) t^i (1-t)^{n-i} P_i.$$

Para $n = 3$, $\beta(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_0$.
Para $n = 4$, $\beta(t)$ utiliza 5 pontos (Figura) e tem equação:
$\beta(t) = (1-t)^4 P_0 + 4t(1-t)^3 P_1 + 6t^2(1-t)^2 P_2 + 4t^3(1-t) P_3 + t^4 P_4$.

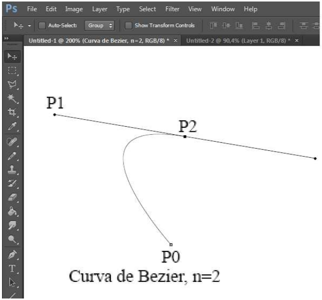


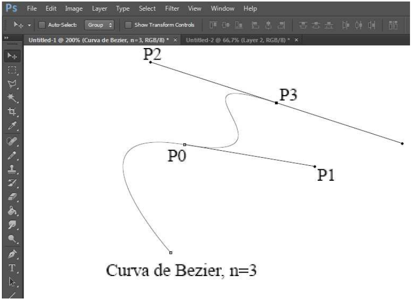
(a) (b)

Curvas de Bezier no Paintbrush

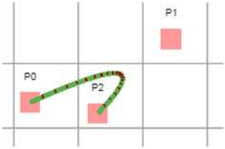


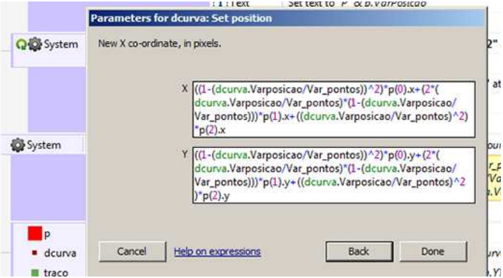
Curvas de Bezier no Photoshop





Implementando Curvas de Bezier no Construct 2





$$n = 2, \quad \beta(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$

$$P_0 = (x_0, y_0), \quad P_1 = (x_1, y_1), \quad P_2 = (x_2, y_2)$$