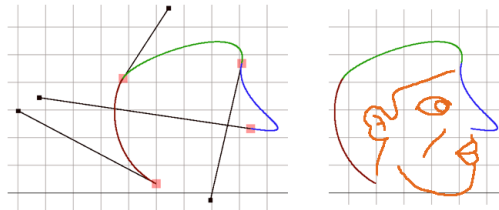


Curvas, Design e Animação

por José Laudelino de M Neto (laudelino@dex.ufpb.br)

Professor do Departamento de Ciências Exatas (DCX) - CCAE - UFPB



Aplicação das Curvas estudadas: computação gráfica, animação, design auxiliado pelo computador (CAD - *Computer Aided Design*).

Sumário

1	Curvas Planas (Geometria Diferencial)	2
2	Curvas de Hermite Cúbicas	6
2.1	Calculando Curvas de Hermite	6
2.2	Conectando Curvas de Hermite	8
3	Curvas de Catmull-Rom	9
3.1	Conectando Curvas de Catmull-Rom	10
4	Curvas de Bézier	11
4.1	Curvas de Bézier Cúbicas	11
4.2	Fórmula Geral das Curvas de Bézier	12
	Referências	13

1 Curvas Planas (Geometria Diferencial)

Consideremos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$. Temos o gráfico de $f(x) = x^2$ na Figura 1.

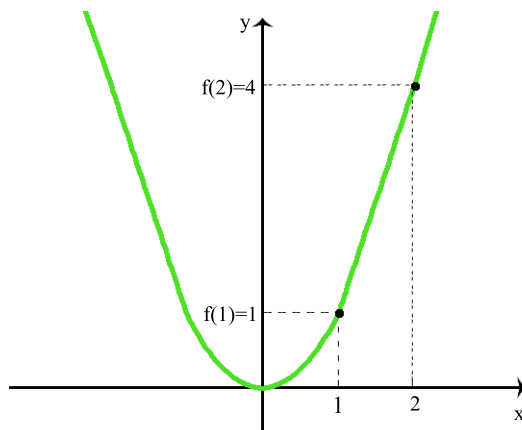


Figura 1: Gráfico de $f(x) = x^2$.

Este gráfico (Figura 1), de certa forma, não nos dá direção por onde devemos percorrê-lo. De certo modo, utilizando a teoria das curvas planas (Geometria Diferencial), podemos reescrever a função $f(x) = x^2$ por meio de uma parametrização da forma: $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $F(t) = (t, t^2)$. A derivada em cada ponto desta parametrização, $F'(t) = (1, 2t)$ nos dá vetores tangentes a curva que definem uma direção por onde podemos percorrer a curva $F(t)$, veja Figura 2.

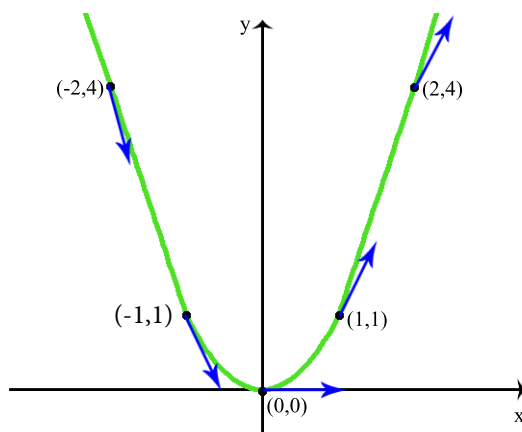


Figura 2: Curva $F(t) = (t, t^2)$.

Se escrevermos $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G(t) = (-t, t^2)$, obtemos a mesma curva feita na Figura 2, mas com a direção contrária, por conta dos vetores tangentes em cada ponto que são dados pela

derivada $G'(t) = (-1, 2t)$, veja Figura 3.

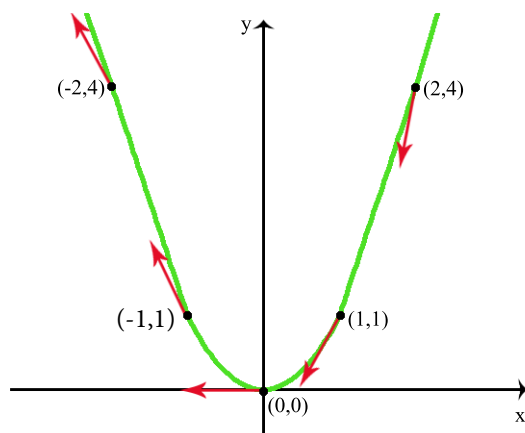


Figura 3: Curva $G(t) = (-t, t^2)$ semelhante a $F(t)$ mas com direção contrária.

Tabela com um comparativo de valores de $F(t)$ e $G(t)$:

t	-2	-1	0	1	2
$F(t)$	$(-2, 4)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 4)$
$G(t)$	$(2, 4)$	$(1, 1)$	$(0, 0)$	$(-1, 1)$	$(-2, 4)$

Tabela com um comparativo de valores de $F'(t)$ e $G'(t)$, ou seja, com os vetores que definem a direção nas curvas:

t	-2	-1	0	1	2
$F'(t)$	$(1, -4)$	$(1, -2)$	$(1, 0)$	$(1, 2)$	$(1, 4)$
$G'(t)$	$(-1, -4)$	$(-1, -1)$	$(-1, 0)$	$(-1, 1)$	$(-1, 4)$

A curva G é uma reparametrização da curva F , ambas possuem o mesmo traço, mas com direções opostas.

Consideremos os pontos $P_0 = (0, 0)$ e $P_1 = (2, 4)$.

Objetivo: utilizando a curva $F(t) = (t, t^2)$, queremos fazer com que $\tilde{F}(0) = P_0$ e $\tilde{F}(1) = P_1$, veja Figura 4.

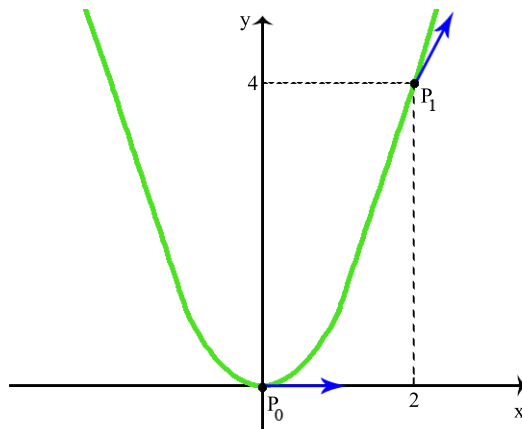


Figura 4: Utilizando curva $F(t) = (t, t^2)$, obter $\tilde{F}(0) = P_0$ e $\tilde{F}(1) = P_1$.

Observamos que $F(0) = (0, 0) = P_0$, $F(1) = (1, 1) \neq P_1$ e $F(2) = (2, 4) = P_1$. Faremos uma reparametrização na curva F para obtermos o objetivo proposto. Para tanto, definimos $f : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ dada por $f(t) = 2t$, assim fazendo a composição $\tilde{F} = F \circ f$ obtemos o objetivo proposto, pois

$$\tilde{F}(0) = F(f(0)) = F(2 \cdot 0) = F(0) = (0, 0) = P_0 \text{ e}$$

$$\tilde{F}(1) = F(f(1)) = F(2 \cdot 1) = F(2) = (2, 4) = P_1.$$

Podemos escrever $\tilde{F}(t) = (F \circ f)(t) = (2t, 4t^2)$.

Sempre podemos considerar que trabalhamos com curvas da forma $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $F(0) = P_0$ é o ponto inicial e $F(1) = P_1$ é o ponto final.

EXEMPLO (Figura 5): Se $F(4) = P_0$ e $F(13) = P_1$, basta fazermos uma reparametrização utilizando $f : [0, 1] \rightarrow [4, 13]$ e fazendo a composição $F \circ f$ para obter

$$(F \circ f)(0) = P_0 \text{ e } (F \circ f)(1) = P_1.$$

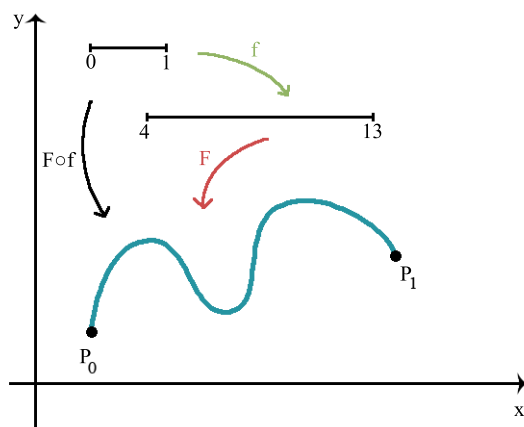


Figura 5: Ilustração do EXEMPLO acima.

2 Curvas de Hermite Cúbicas

Ao invés de utilizar uma curva já definida, vamos marcar pontos e vetores no plano para definir uma curva que passa por eles (método de interpolação).

OBSERVAÇÃO: Curva gerada que passa por todos os pontos dados: interpolação. Curva gerada que NÃO passa por todos os pontos dados: aproximação.

Utilizamos uma curva cúbica (de grau 3), porque este é o tipo de curva mais simples (menos trabalho nas contas) que garante continuidade e suavidade (diferenciabilidade).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pontos } P_0, P_1 \\ \text{Vetores } P'_0, P'_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{curva gerada } Q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

curva obtida $Q(t)$ satisfaz: $Q(0) = P_0$, $Q(1) = P_1$ e $Q'(0) = P'_0$, $Q'(1) = P'_1$.

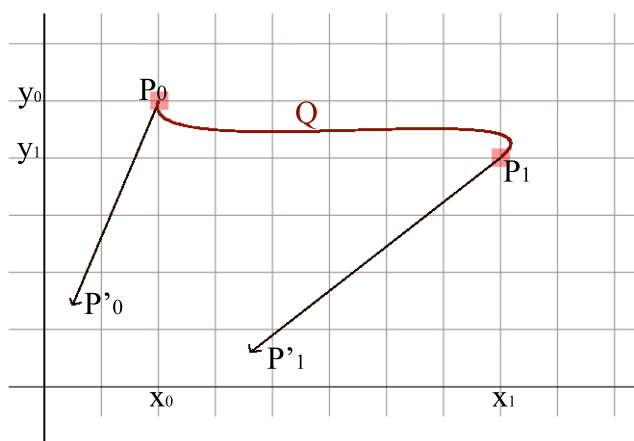


Figura 6: Curva de Hermite cúbica.

As curvas de Hermite são, digamos, a porta de entrada para estudar métodos de interpolação, ou seja, dados um conjunto de pontos e vetores, gerar uma curva que passa por esses pontos e vetores.

2.1 Calculando Curvas de Hermite

Consideremos $Q(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, onde $a = (a_x, a_y)$, $b = (b_x, b_y)$, $c = (c_x, c_y)$, $d = (d_x, d_y)$, $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P'_0 = (x'_0, y'_0)$ e $P'_1 = (x'_1, y'_1)$. Assim,

$$Q'(t) = 3at^2 + 2bt + c.$$

Nosso objetivo é determinar os valores dos pares ordenados a, b, c, d em função dos valores dados de P_0, P_1, P'_0 e P'_1 .

Logo,

$$Q(0) = P_0 \Rightarrow d = P_0 \Rightarrow (d_x, d_y) = (x_0, y_0), \quad (1)$$

$$Q(1) = P_1 \Rightarrow a + b + c + d = P_1, \quad (2)$$

$$Q'(0) = P'_0 \Rightarrow c = P'_0 \Rightarrow (c_x, c_y) = (x'_0, y'_0), \quad (3)$$

$$Q'(1) = P'_1 \Rightarrow 3a + 2b + c = P'_1. \quad (4)$$

Das equações (1) e (3) acima, já temos os valores de $c = P'_0$ e $d = P_0$. Para determinar a e b , utilizamos as equações (2) e (4) para montar o sistema

$$\begin{cases} a + b + P'_0 + P_0 = P_1 \\ 3a + 2b + P'_0 = P'_1. \end{cases} \quad (5)$$

O sistema (5) possui a seguinte solução

$$\begin{cases} a = 2(P_0 - P_1) + P'_0 + P'_1 \\ b = 3(P_1 - P_0) - 2P'_0 - P'_1. \end{cases}$$

Portanto,

$$Q(t) = [2(P_0 - P_1) + P'_0 + P'_1]t^3 + [3(P_1 - P_0) - 2P'_0 - P'_1]t^2 + P'_0 t + P_0.$$

Podemos reescrever $Q(t)$ da seguinte maneira,

$$Q(t) = \underbrace{(2t^3 - 3t^2 + 1)}_{p_1(t)} P_0 + \underbrace{(-2t^3 + 3t^2)}_{p_2(t)} P_1 + \underbrace{(t^3 - 2t^2 + t)}_{p_3(t)} P'_0 + \underbrace{(t^3 - t^2)}_{p_4(t)} P'_1.$$

Observação: Quanto maior o vetor tangente mais suave o seu desenho.

As funções $p_i(t), i = 1, \dots, 4$, funcionam como uma base na construção da curva $Q(t)$.

EXEMPLO: Utilizando os pontos $P_0 = (1, 1)$, $P_1 = (5, 2)$, e vetores $P'_0 = (2, -1)$, $P'_1 = (-2, 1)$, obtemos a curva $Q(t) = (-9t^3 + 12t^2 + t + 1, -2t^3 + 4t^2 - t + 1)$, veja Figura 7.

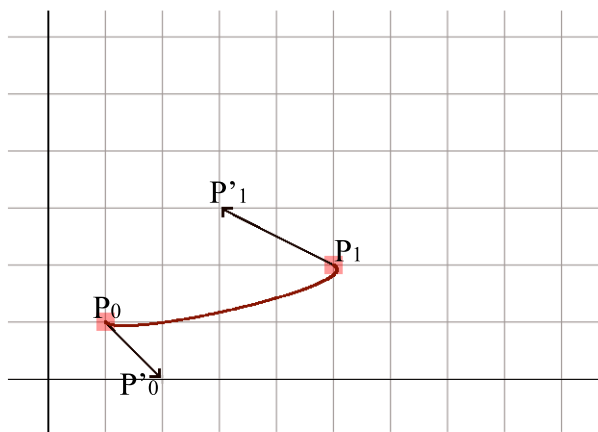


Figura 7: Curva $Q(t)$ ligando os pontos $P_0 = (1, 1)$ e $P_1 = (5, 2)$.

2.2 Conectando Curvas de Hermite

Conectamos três Curvas de Hermite (Figura 8)

$Q_0(t)$ (gerada por P_0, P_1, P'_0, P'_1), $Q_1(t)$ (gerada por P_1, P_2, P'_1, P'_2), e

$Q_2(t)$ (gerada por P_2, P_3, P'_2, P'_3).

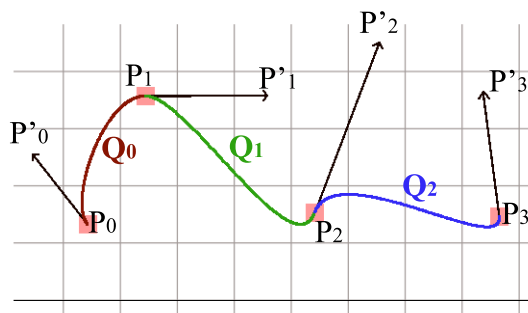


Figura 8: Curvas de Hermite conectadas: Q_0 (vermelho), Q_1 (verde), Q_2 (azul).

3 Curvas de Catmull-Rom

Técnica desenvolvida por Edwin Catmull e Raphael Rom, pode ser vista como um melhoramento das curvas de Hermite, pois geram os vetores de forma implícita, basta determinar os pontos.

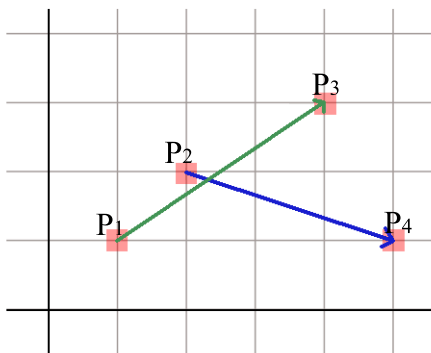


Figura 9: Vetores.

Fazer curva γ ligando os pontos P_2 e P_3 (Figura 10). Os pontos P_1 e P_4 são pontos auxiliares para construção dos vetores $\overrightarrow{P_2P_4}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ (Figura 9).

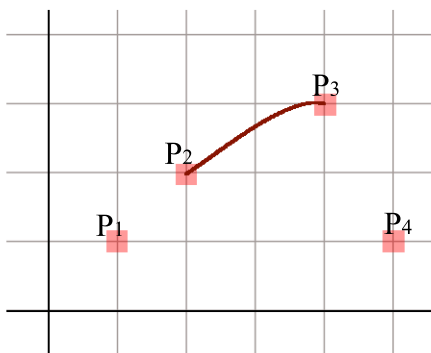


Figura 10: Curva $\gamma(t)$ gerada por P_1, P_2, P_3, P_4 .

Para calcular $\gamma(t)$ procedemos como na curva de Hermite, $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ com

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= P_2, \\ \gamma(1) &= P_3, \\ \gamma'(0) &= \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_3}, \quad \overrightarrow{P_1P_3} = P_3 - P_1, \\ \gamma'(1) &= \frac{1}{2}\overrightarrow{P_2P_4}, \quad \overrightarrow{P_2P_4} = P_4 - P_2. \end{aligned}$$

Resolvendo, obtemos

$$\begin{aligned} a &= 2(P_2 - P_3) + \frac{1}{2}(P_3 - P_1) + \frac{1}{2}(P_4 - P_2), \\ b &= 3(P_3 - P_2) - (P_3 - P_1) - \frac{1}{2}(P_4 - P_2), \\ c &= \frac{1}{2}(P_3 - P_1), \\ d &= P_2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\gamma(t) = \underbrace{\frac{1}{2}(-t^3 + 2t^2 - t)}_{p_1(t)} P_1 + \underbrace{\frac{1}{2}(3t^3 - 5t^2 + 2)}_{p_2(t)} P_2 + \underbrace{\frac{1}{2}(-3t^3 + 4t^2 + t)}_{p_3(t)} P_3 + \underbrace{\frac{1}{2}(t^3 - t^2)}_{p_4(t)} P_4.$$

3.1 Conectando Curvas de Catmull-Rom

Conectamos três curvas de Catmull-Rom (Figura 11)

$\gamma_0(t)$ liga P_0 a P_1 (gerada por P_{-1}, P_0, P_1, P_2),

$\gamma_1(t)$ liga P_1 a P_2 (gerada por P_0, P_1, P_2, P_3), e

$\gamma_2(t)$ liga P_2 a P_3 (gerada por P_1, P_2, P_3, P_4).

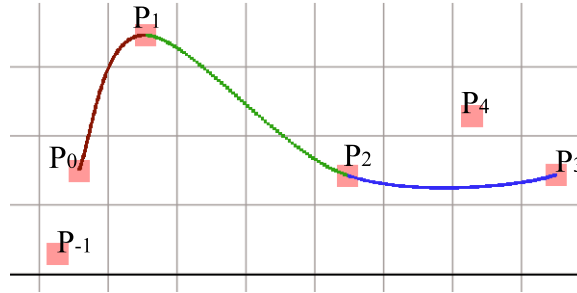


Figura 11: Curvas γ_0 (vermelho), γ_1 (verde) e γ_2 (azul).

Os pontos P_{-1} e P_4 são auxiliares na construção das curvas. Podemos utilizar um método para gerá-los de forma automática. No caso,

$$P_{-1} = P_0 - (P_1 - P_0) \quad \text{e} \quad P_4 = P_3 + (P_3 - P_2).$$

4 Curvas de Bézier

As Curvas de Bézier não são curvas do tipo de interpolação, são curvas de aproximação. Foram desenvolvidas por Pierre Bézier com a finalidade de criar design de carros para empresa Renault.

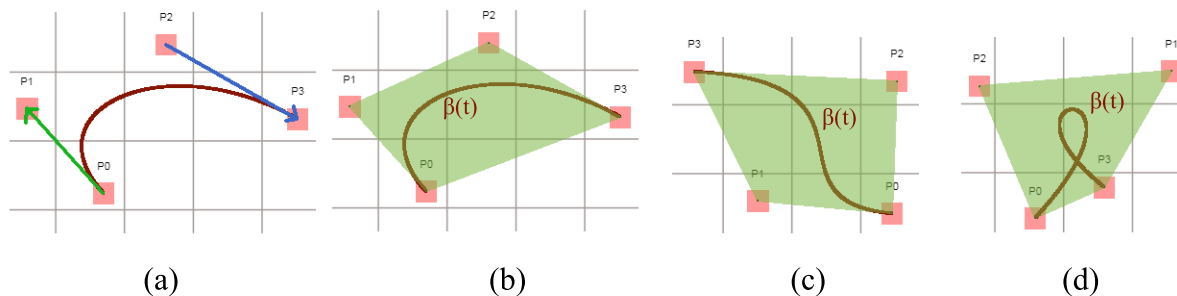


Figura 12: Curvas Cúbicas de Bézier.

4.1 Curvas de Bézier Cúbicas

Utiliza quatro pontos de controle, por exemplo, P_0, P_1, P_2, P_3 , com a curva conectando os pontos P_0 a P_3 , e P_1 e P_2 como pontos auxiliares para gerar os vetores $\overrightarrow{P_0P_1}$ e $\overrightarrow{P_2P_3}$ (Figura 12 (a)). A curva fica inscrita no polígono de controle gerado pelo fecho convexo de P_0, P_1, P_2, P_3 (Figura 12 (b), (c), (d)).

OBSERVAÇÃO: As figuras (b), (c) e (d) da Figura 12 são curvas de Bézier cúbicas, mas com os pontos posicionados em locais diferentes.

Obtemos a equação da curva de Bézier cúbica $\beta(t)$ (Figura 12 (b), (c), (d)) do mesmo método feito para curvas de Hérmite Cúbicas,

$$\beta(t) = at^3 + bt^2 + ct + d, \quad \beta'(t) = 3at^2 + 2bt + c,$$

$$\beta(0) = P_0, \quad \beta(1) = P_3, \quad \beta'(0) = 3\overrightarrow{P_0P_1}, \quad \beta'(1) = 3\overrightarrow{P_2P_3}.$$

Resolvendo, obtemos

$$a = P_3 - 3P_2 + 3P_1 - P_0,$$

$$b = -6P_1 + 3P_0 + 3P_2,$$

$$c = 3P_1 - 3P_0,$$

$$d = P_0.$$

Logo,

$$\beta(t) = \underbrace{(-t^3 + 3t^2 - 3t + 1)}_{p_0(t)} P_0 + \underbrace{(3t^3 - 6t^2 + 3t)}_{p_1(t)} P_1 + \underbrace{(-3t^3 + 3t^2)}_{p_2(t)} P_2 + \underbrace{t^3}_{p_3(t)} P_3.$$

4.2 Fórmula Geral das Curvas de Bézier

$$\beta(t) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{n!}{i!(n-i)!} \right) t^i (1-t)^{n-i} P_i.$$

Para $n = 4$, a curva de Bézier $\beta(t)$ utiliza 5 pontos (Figura 13 (a)) e tem a seguinte equação:

$$\beta(t) = (1-t)^4 P_0 + 4t(1-t)^3 P_1 + 6t^2(1-t)^2 P_2 + 4t^3(1-t) P_3 + t^4 P_4.$$

Na Figura 13 (b) vemos o polígono de controle da curva.

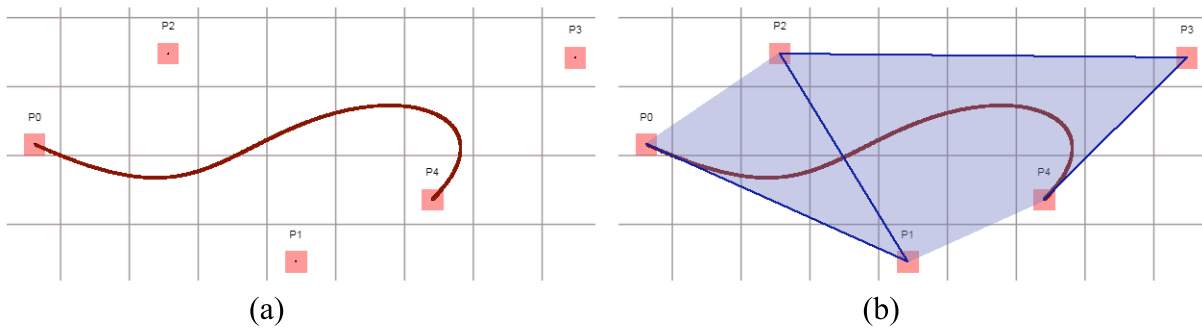


Figura 13: Curva de Bézier quádrlica.

Referências

- [1] CATMULL, E.; ROM, R. **A Class of Local Interpolation Splines**, em R. E. Barnhill e R. F. Riesenfeld (eds.), Computer Aided Geometric Design, Academic Press, New York, 1974.
- [2] GORDON, W. J.; RIESENFELD, R. F. **B-Splines Curves and Surfaces**, em R. E. Barnhill e R. F. Riesenfeld (eds.), Computer Aided Geometric Design, Academic Press, New York, 1974.
- [3] HUGHES, J. F. et al. **Computer Graphics: Principles and Practice**, Addison-Wesley Professional, 2014.
- [4] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**, IMPA, 1983.
- [5] TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**, Edgard Blucher, 2008.
- [6] VAN VERTH, J. M.; BISHOP, L. M. **Essential Mathematics for Games and Interactive Applications: A Programmer's Guide**, Morgan Kaufmann, 2004.