José Laudelino de M. Neto

laudelino@dce.ufpb.br

www.ccae.ufpb.br/dce

Cálculo 2

Licenciatura em Matemática
UFPB - Campus IV

Sumário

1 Aplicações da Derivada

Na primeira etapa do curso aprendemos a derivar, nesta segunda etapa aprenderemos a obter informações a respeito do comportamento das funções utilizando derivadas.

Roteiro:

Aplicações da derivada:

- Teorema de Rolle e Teorema do Valor Médio.
- Intervalos de crescimento e decrescimento.
- Concavidade e pontos de inflexão.
- Máximos e mínimos locais; pontos críticos.

Regras de L'Hospital (ou L'Hôpital): cálculo de limites com indeterminação utilizando derivada.

1.1 Teorema de Rolle e TVM

Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que

- $c \in D$ é um ponto de máximo local em D quando existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \leq f(c), \forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$;
- $d \in D$ é um ponto de mínimo local em D quando existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \geq f(d), \forall x \in (d - \varepsilon, d + \varepsilon)$.

Lema 1 *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em (a, b), ou seja, f é de classe $C^1([a, b])$. Se $c \in (a, b)$ é ponto de máximo ou mínimo local em $[a, b]$, então $f'(c) = 0$.*

Demonstração: Suponhamos $c \in (a, b)$ ponto de máximo local.

Logo, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \leq f(c), \forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \Rightarrow f(x) - f(c) \leq 0, \forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$.

Como f é derivável em c, por um lado temos

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

e, por outro lado,

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Logo, $f'(c) \geq 0$ e $f'(c) \leq 0 \Rightarrow f'(c) = 0$. ■

Teorema 1 (de Rolle) *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável em (a,b), ou seja, f é de classe $C^1([a,b])$. Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Em outras palavras, o Teorema de Rolle diz que: $f \in C^1([a,b])$ com $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a,b)$ tal que a reta tangente a f no ponto $(c, f(c))$ é constante.

Demonstração: Se f é constante em $[a,b]$, então $f(a) = f(b)$ e $f'(x) = 0, \forall x \in (a,b)$.

Suponhamos f não constante em $[a,b]$.

f derivável em $(a,b) \Rightarrow f$ contínua em $[a,b] \Rightarrow$ (pelo Teorema de Weierstrass) existem $x_1, x_2 \in [a,b]$ tais que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in [a,b],$$

ou seja, x_1 é ponto de mínimo local e x_2 é ponto de máximo local.

Pelo Lema 1, $f'(x_1) = 0$ e $f'(x_2) = 0$.

Como f não é constante, então $f(x_1) \neq f(x_2)$ e, sendo $f(a) = f(b)$, temos $x_1 \in (a,b)$ ou $x_2 \in (a,b)$. Assim, $x_1 = c$ ou $x_2 = c$.

$c \in (a,b)$ com $f'(c) = 0$. ■

Corolário 1 (Teorema do Valor Médio - TVM) *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável em (a,b), ou seja, f é de classe $C^1([a,b])$. Então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ou $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.*

Em outras palavras, o TVM diz que: $f \in C^1([a,b]) \Rightarrow \exists c \in (a,b)$ tal que o coeficiente angular da reta tangente a f em $(c, f(c))$ é igual ao coeficiente angular da reta secante que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Demonstração: Seja $s(x) = \alpha x + \beta$ a reta secante que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, então

$$s(a) = f(a), s(b) = f(b) \text{ e } \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Definimos

$$g(x) = f(x) - s(x).$$

Ora, $g(a) = g(b)$ e g é derivável em (a,b), pois f e s são deriváveis em (a,b). Logo, pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$,

$$g'(c) = f'(c) - s'(c) = f'(c) - \alpha = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ ou } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \blacksquare$$