José Laudelino de M. Neto

laudelino@dce.ufpb.br

www.ccae.ufpb.br/dce

Cálculo 2

Licenciatura em Matemática
UFPB - Campus IV

Sumário

1 Introdução as derivadas

Uma reta $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $r(x) = mx+n$ fica bem determinada quando sabemos, obviamente, quais são os números reais m e n.

- m é o *coeficiente angular* da reta r e nos informa o seu grau de inclinação.
- Quando $m \neq 0$, n nos diz, graficamente, onde a reta r corta o eixo x. Quando $m = 0$, r é uma função constante paralela ao eixo x, passando pelo ponto $(0, n)$.

A derivada de uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ garante uma maneira de calcular o coeficiente angular da reta tangente ao seu gráfico em um ponto da forma $(p, f(p))$, onde p pertence ao domínio de f. Além disso, a derivada dá informações a respeito do comportamento da função, o que irá nos auxiliar a construir o seu gráfico.

Roteiro das aulas:

1. Definição formal.
2. Regras de derivação.
3. Interpetação gráfica de derivadas.
4. Propriedades: Continuidade, Teorema do Valor Médio, crescimento e decrescimento, máximos e mínimos, concavidade e pontos de inflexão.
5. Regras de L'Hospital (nova técnica para calcular alguns tipos de limites utilizando derivadas).

Referências:

- Guidorizzi, *Um curso de cálculo, vol. 1*, LTC. (**Atenção:** LIVRO ADOTADO NO CURSO!)
- Flemming & Gonçalves, *Cálculo A*, Pearson Prentice Hall.
- Stewart, *Cálculo, vol. 1*, Cengage Learning.

1.1 Definição Formal

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e p um ponto pertencente ao domínio de f. O limite

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

quando existe e é finito, chama-se *derivada de f em p* e denota-se por $f'(p)$ (lê-se "f linha de p").

Assim,

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Se f admite derivada em p, então diremos que f é *derivável* ou *diferenciável* em p.

Dizemos que f é derivável em um conjunto A contido no domínio de f quando f for derivável em cada $p \in A$.

Exemplo 1 *Seja $f(x) = x^2$, f é derivável no ponto $p = 2$, pois*

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 4.$$

Exemplo 2 *Seja*

$$g(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq \end{cases},$$

g não é derivável em $p = 0$, pois

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

*não existe, ou seja, $g'(0)$ não existe. Basta verificar que os limites laterais são diferentes. (Veja **Exemplo 7** do livro de Guidorizzi, página 141)*

Observação 1 *Mais exemplos de funções que não possuem derivadas em certos pontos podem ser encontrados na seção **7.6. Derivabilidade e Continuidade** do livro de Guidorizzi, página 151.*

Podemos calcular derivadas de uma outra maneira, fazendo uma mudança de variáveis. Sabemos que

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p},$$

consideremos $h = x - p$, quando x tende a p, $x \to p$, temos que h vai para zero, $h \to 0$, e

$$h = x - p \Rightarrow x = h + p,$$

assim,

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h + p) - f(p)}{h}.$$

Com esta nova fórmula fica mais fácil de calcularmos uma regra para derivada das funções.

Exemplo 3 *Seja $f(x) = x^2$, determine uma regra para $f'(x)$. Ora, utilizando a nova definição de derivada, temos*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = 2x.$$

Portanto, $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$ e temos $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$. Compare com o resultado obtido no Exemplo 1.

1.2 Outra notação para derivada

A outra notação para derivada tem um conceito relacionado a física, no que diz respeito a deslocamento,

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to p} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}(p).$$

Se pensarmos que uma função $f(x)$ representa o deslocamento de alguma particula, ou seja, a trajetoria de uma particula, a derivada da função em um ponto p, $f'(p) = \frac{df}{dx}(p)$, nos diz a velocidade da particula no instante $f(p)$. A derivada segunda em um determinado ponto p, $f''(p) = \frac{d^2 f}{dx^2}(p)$, a qual veremos mais adiante, nos diz a acelaração da particula no instante $f(p)$.

1.3 Regras de derivação

É um pouco trabalhoso calcular derivadas de funções pela definição formal, por isso, iremos "criar" certas regras que nos auxiliarão nestas contas. Por exemplo, se fossemos calcular a derivada de $f(x) = 5x^7 + \frac{\cos x}{e^x} + 2x^3 + \sqrt{2}\ln x$, levariamos muito tempo e poderiamos nos atrapalhar nas contas, com as regras de derivação, fica muito simples determinar quem é $f'(x)$ (veja o Exemplo 5).

1.3.1 Derivadas de potências: $x^n, x^{-n}, x^{\frac{1}{n}}$

Seja n um número natual, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

a) A derivada de x^n é nx^{n-1}, ou seja, $(x^n)' = nx^{n-1}$.

b) A derivada de $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ é $-nx^{-n-1}$, ou seja, $(x^{-n})' = (\dfrac{1}{x^n})' = -nx^{-n-1} = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$.

c) A derivada de $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ é $\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$, ou seja, $(x^{\frac{1}{n}})' = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$, onde $x > 0$ se n for par e $x \neq 0$ se n for ímpar ($n \geq 2$).

Exemplo 4 *Calcular as derivadas de* x^5, $\sqrt[11]{x}$ *e* $\dfrac{1}{x^6}$. *Utilizando as regras acima, temos*

- $(x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4$.
- $(\sqrt[11]{x})' = (x^{\frac{1}{11}})' = \dfrac{1}{11}x^{\frac{1}{11}-1} = \dfrac{1}{11}x^{-\frac{10}{11}} = \dfrac{1}{11}\dfrac{1}{(\sqrt[11]{x})^{10}}$
- $\left(\dfrac{1}{x^6}\right)' = (x^{-6})' = -6x^{-6-1} = -6x^{-7} = -\dfrac{6}{x^7}$.

1.3.2 Derivadas de funções importantes

- Derivada da exponencial: $(e^x)' = e^x$.
- Derivada do logaritmo natural: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
- Derivada do seno: $(\sin x)' = \cos x$.
- Derivada do cosseno: $(\cos x)' = -\sin x$.

As derivadas de $\tan x$ (tangente), $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ (secante) e $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ (cossecante) serão vistas quando aprendermos as regras da soma, produto, quociente etc.

1.3.3 Derivadas da soma, produto e quociente

Sejam f e g duas funções deriváveis e $k \in \mathbb{R}$. Então, as funções $f \cdot g$, kf e $f+g$ são deriváveis e valem as seguintes fórmulas:

(D1) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$,

(D2) $(kf(x))' = kf'(x)$,

(D3) $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

Regra do quociente: Se f e g são deriváveis e $g(x) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é derivável e vale a seguinte fórmula:

(D4) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Exemplo 5 *Seja* $f(x) = 5x^7 + \dfrac{\cos x}{e^x} + 2x^3 + \sqrt{2}\ln x$. *Calcule* $f'(x)$.

Solução: Utilizando as regras, temos:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(5x^7 + \tfrac{\cos x}{e^x} + 2x^3 + \sqrt{2}\ln x\right)' \\
&= \left(5x^7\right)' + \left(\tfrac{\cos x}{e^x}\right)' + \left(2x^3\right)' + \left(\sqrt{2}\ln x\right)' \\
&= 5\left(x^7\right)' + \left(\tfrac{\cos x}{e^x}\right)' + 2\left(x^3\right)' + \sqrt{2}\left(\ln x\right)' \\
&= 5(7x^{7-1}) + \tfrac{(\cos x)'e^x-(e^x)'\cos x}{[e^x]^2} + 2(3x^{3-1}) + \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{x}\right) \\
&= 5(7x^6) + \tfrac{(-\sin x)e^x-(e^x)\cos x}{[e^x]^2} + 2(3x^2) + \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{x}\right) \\
&= 35x^6 + \tfrac{-e^x\sin x - e^x\cos x}{[e^x]^2} + 6x^2 + \tfrac{\sqrt{2}}{x} \\
&= 35x^6 - \tfrac{\sin x+\cos x}{e^x} + 6x^2 + \tfrac{\sqrt{2}}{x}.
\end{aligned}$$

1.3.4 Regra da cadeia

Sejam $g : A \to B$ $f : C \to D$ funções deriváveis, onde $A, B, C, D \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq C$. Então, $f \circ g : A \to D$ é derivável e vale a seguinte regra (conhecida como *Regra da cadeia*):

$$(f\circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x).$$

Exemplo 6 *Sejam* $f(x) = \sqrt{x}$ *e* $g(x) = \ln x$. *Calcule* $(f\circ g)'(x) = [\sqrt{\ln x}]'$ *e* $(g\circ f)'(x) = [\ln(\sqrt{x})]'$.

Solução: Primeiro, calculemos $f'(x)$ e $g'(x)$.

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

e

$$g'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Assim, aplicando a regra da cadeia, temos

$$(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = [f'(\ln x)] \cdot [g'(x)] = \left[\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\right] \cdot \left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

e

$$(g \circ f)'(x) = [g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = [g'(\sqrt{x})] \cdot [f'(x)] = \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] \cdot \left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\right] = \frac{1}{2x}.$$

1.3.5 Derivada de $f(x)^{g(x)}$

Para calcularmos derivadas de funções do tipo $f(x)^{g(x)}$, devemos utilizar, basicamente, a regra da cadeia e a propriedade de que a função logaritmo é a inversa da exponencial (e vice-versa), ou seja,

$$e^{\ln x} = x \text{ e } \ln e^x = x.$$

Assim, utilizando a primeira igualdade, temos

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Logo,

$$\left[f(x)^{g(x)}\right]' = \left[e^{g(x) \ln f(x)}\right]' = e^{g(x) \ln f(x)} \cdot [g(x) \ln f(x)]'.$$

Observação 2 *Para um outro tipo de explicação e exemplos, consulte a seção* ***7.12. Derivada de*** $f(x)^{g(x)}$ *do livro de Guidorizzi, página 183.*

1.4 Exercícios - Derivadas

Para entregar no dia 26 de agosto de 2010.

Pode ser feito em grupo de, no máximo, 2 (dois) estudantes!

Exercício 1 *Calcule, pela definição, a derivada da função* $g(x) = \sqrt{x^2 + x}$ *no ponto* $p = 1$.

Exercício 2 *Seja* g *uma função derivável tal que* $g(x) \neq 0, \forall x$. *Utilizando a regra do quociente, determine uma fórmula para derivada de* $\frac{1}{g}$, *ou seja, calcule* $\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$.

Exercício 3 *Utilizando a regra do quociente e, quando for o caso, a regra da questão 4, calcule as derivadas das seguintes funções trigonométricas:*

a) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ *(tangente)*

b) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ *(cotangente)*

c) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ *(secante)*

d) $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ *(cossecante)*

Exercício 4 *As funções*

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad e \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

são conhecidas, respectivamente, como seno hiperbólico *e* cosseno hiperbólico. *Calcule as suas derivadas.*

Exercício 5 *Utilizando a regra da cadeia, derive* $\cos^3 x^3 = [\cos(x^3)]^3$.

Exercício 6 *Calcule a derivada de* $h(x) = x^{x^3+2}$.